ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KINH TẾ - LUẬT
-------------Oo------------

PGS.TS. Lê Anh Vũ

BÀI GIẢNG TÓM LƯỢC
ÔN THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC 2015

MÔN

LÝ THUYẾT XÁC SUẤT&THỐNG KÊ TOÁN HỌC
QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH 3 – 2015

ĐỀ CƯƠNG ÔN THI TUYỂN SINH CAO HỌC TRƯỜNG ĐẠI HỌC KINH TẾ - LUẬT NĂM 2015

PHẦN I: XÁC SUẤT - THỐNG KÊ (6 ĐIỂM)

I.1. Xác suất (3 điểm)

1. **Khái niệm về xác suất**
   - Phép thử và biến cố, phân loại các biến cố.
   - Quan hệ và các phép toán trên biến cố. Hệ đầy đủ các biến cố.
   - Định nghĩa cổ điển của xác suất và các tính chất cơ bản.
   - *Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê và hình học*.
2. **Các công thức tính xác suất**
   - Công thức cộng xác suất.
   - Xác suất có điều kiện và công thức nhân xác suất.
   - Công thức xác suất đầy đủ và công thức xác suất giả thiết (Bayes).
   - Công thức Bernoulli.
3. **Biến (đại lượng) ngẫu nhiên (một chiều) và phân phối xác suất**
   - Khái niệm về biến ngẫu nhiên. Phân loại biến ngẫu nhiên: rời rạc, *liên tục*.
   - Quy luật phân phối xác suất (PPXS) của biến ngẫu nhiên: Bảng PPXS của biến ngẫu nhiên rời rạc, hàm PPXS, *hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục*.
   - Vài phân phối thông dụng: Phân phối nhị thức, phân phối siêu bội, *phân phối Poinson*, *phân phối chuẩn*, *phân phối "khi – bình phương"*, *phân phối "student"*.
4. ***Sơ lược về biến (đại lượng) ngẫu nhiên hai chiều***.

I.2. Thống kê (3 điểm)

1. **Lý thuyết mẫu**
   - Tổng thể và mẫu, phương pháp mẫu.
   - Mẫu định tính, mẫu định lượng và các đặc trưng cơ bản của chúng.
   - *Các quy luật phân phối xác suất của mẫu, mẫu hai chiều*.
2. **Lý thuyết ước lượng thống kê**
   - *Ước lượng điểm chệch và không chệch*.
   - Hai bài toán ước lượng khoảng đối xứng (hai phía) của trung bình tổng thể và tỷ lệ của tổng thể với <u>kích thước mẫu không dưới 30, biến ngẫu nhiên được giả thiết có phân phối chuẩn</u>. *Xác định kích thước mẫu, xác định độ tin cậy*.
3. **Lý thuyết kiểm định thống kê**
   - Khái niệm về kiểm định.
   - Hai bài toán kiểm định tham số hai phía, một phía về trung bình và tỷ lệ của tổng thể với <u>kích thước mẫu không dưới 30, biến ngẫu nhiên được giả thiết có phân phối chuẩn</u>.
   - *Kiểm định về phương sai tổng thể. Kiểm định bằng p – value*.
   - *Kiểm định giả thuyết về phân phối xác suất*.

- Kiểm định giả thuyết về so sánh hai tham số (tỷ lệ hoặc trung bình) của hai tổng thể.

PHẦN II: QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH (4 ĐIỂM)

II.1. Các dạng bài toán quy hoạch tuyến tính (QHTT)

1. *Thiết lập bài toán QHTT từ vấn đề thực tiễn*.

2. Bài toán QHTT và các khái niệm liên quan: hàm mục tiêu, phương án, miền ràng buộc, phương án tối ưu (nghiệm).

3. Các dạng cơ bản của bài toán QHTT: dạng tổng quát; dạng chính tắc (các ràng buộc chính đều là phương trình, các biến đều không âm); dạng chính tắc chuẩn (là dạng chính tắc mà các vế phải trong các phương trình ràng buộc chính đều không âm, ma trận hệ số của hệ ràng buộc chính có hạng bằng số phương trình và không quá số biến. Đồng thời ma trận hệ số đó chứa một ma trận con đơn vị hoặc ma trân con sơ cấp với cấp bằng số ràng buộc chính).

4. Biến đổi bài toán QHTT từ dạng tổng quát thành dạng chính tắc và từ dạng chính tắc thành dạng chính tắc chuẩn.

5. Phương án cực biên.

II.2. Bài toán QHTT đối ngẫu

1. Cách thiết lập bài toán đối ngẫu của một bài toán QHTT cho trước.

2. Định lý cân bằng, định lý độ lệch bù áp dụng để kiểm tra tính tối ưu của một phương án đã cho hoặc tìm tập phương án tối ưu của bài toán QHTT.

II.3. Giải bài toán QHTT bằng phương pháp đơn hình

Ghí chú: Trong quá trình ôn tập, ***nhấn mạnh các nội dung chữ in thường***, ***sơ lược các nội dung chữ in nghiêng***.

PHẦN 1

XÁC SUẤT

1. PHÉP ĐẾM VÀ TỔ HỢP

1.1. Tóm tắt lý thuyết

1.1.1. Quy tắc cộng

Giả sử một công việc **V** có thể thực hiện theo một và chỉ một trong **k** phương án loại trừ lẫn nhau **V_1 hoặc** V_2, **hoặc** …, **hoặc V_k**. Số cách thực hiện mỗi phương án V_i là n_i (i = 1, 2, … , **k**). Khi đó số cách thực hiện việc **V** là $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

1.1.2. Quy tắc nhân

Giả sử một công việc **V** có thể thực hiện theo **k** công đoạn liên tiếp hay đồng thời **V_1, V_2**, … **và V_k**. Số cách thực hiện V_i là n_i (I = 1, 2, … , **k**). Khi đó số cách thực hiện việc **V** là $n_1.n_2. \ldots .n_k$.

1.1.3. Tổ hợp

Mỗi tập con k phần tử khác nhau của một tập hợp n phần tử (0 ≤ k ≤ n) được gọi là *một tổ hợp chập k của n phần tử* đã cho.

Kí hiệu số các tổ hợp chập k của n phần tử là C_n^k. Ta có công thức tính số tổ hợp chập k của n phần tử như sau:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}; \quad 0 \le k \le n.$$

Chú ý: Chọn k phần tử (bình đẳng) từ tập hợp n phần tử thì số cách chọn là C_n^k (0 ≤ k ≤ n).

1.2. Ví dụ minh họa

1.2.1. Ví dụ 1: Một hộp có 10 viên phấn gồm 6 viên trắng và 4 viên phấn màu. Lấy ngẫu nhiên ra 3 viên phấn. Hỏi có bao nhiêu cách lấy sao cho:

a) Các viên phân tùy ý, không chú ý đến mầu sắc.
b) Lấy được 2 viên trắng và 1 viên mầu.
c) Lấy được không quá 1 viên phấn trắng.
d) Lấy được ít nhất 1 viên phấn mầu.

Đáp số: a) $C_{10}^3 = 120$; b) $C_6^2.C_4^1 = 60$;
c) $C_4^3 + C_6^1C_4^2 = 40$; d) $C_{10}^3 - C_6^3 = 100$.

1.2.2. Ví dụ 2: Một lô hàng 15 sản phẩm gồm 4 sản phẩm loại I, 5 sản phẩm lại II, 6 sản phẩm loại III. Chọn ngẫu nhiên 3 sản phẩm để kiểm tra. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho:

a) Các sản phẩm tùy ý, không phân biệt loại.
b) Chọn được mỗi loại 1 sản phẩm.
c) Chọn được không quá 1 sản phẩm loại I.

d) Chọn được ít nhất 1 sản phẩm loại I.

Đáp số: a) C_{15}^3; b) $C_4^1.C_5^1.C_6^1$;

c) $C_{15-4}^3 + C_4^1 C_{15-4}^2$; d) $C_{15}^3 - C_{15-4}^3$.

2. PHÉP THỬ VÀ BIẾN CỐ

2.1. Mô tả khái niệm

2.1.1. Phép thử: Một hành động mà ta thực hiện trong một hoặc một nhóm điều kiện xác định nhằm nghiên cứu những hiện tượng ngẫu nhiên gọi là một *phép thử*.

Mỗi phép thử trong môn xác suất đóng vai trò tương tự như vai trò của một "thí nghiệm" trong các môn vật lý học, sinh học, y học, … .

2.1.2. Biến cố: Các kết cục có thể xẩy ra hay không xẩy ra sau phép thử được gọi là các *biến cố*.

2.1.3. Ví dụ 3

Một lô hàng 10 sản phẩm gồm 7 chính phẩm và 3 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm của lô hàng để kiểm tra.

* Phép thử: hàng động lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm.

* Các biến cố

- A: Lấy được 2 chính phẩm và 1 phế phẩm.
- B: Lấy được cả 3 chính phẩm.
- C: Lấy được cả 3 phế phẩm.
- D: Lấy được ít nhất 1 chính phẩm trong 3 sản phẩm.
- E: Cả 3 sản phẩm không có phế phẩm nào mà cũng không có chính phẩm nào.
- F: Trong 3 sản phẩm đã lấy, tổng số phế phẩm và chính phẩm là 3.

2.2. Phân loại biến cố

2.2.1. Biến cố luôn xảy ra sau phép thử được gọi là *biến cố chắc chắn*, kí hiệu Ω.

2.2.2. Biến cố không bao giờ xảy ra sau phép thử được gọi là *biến cố không thể*, kí hiệu là $\varnothing$.

2.2.3. Biến cố có thể xảy ra, cũng có thể không xảy ra sau phép thử được gọi là *biến cố ngẫu nhiên* (viết tắt BCNN), kí hiệu là A, B, ..., C_1, C_2, ...

2.2.4. Trong Ví dụ 3, ta có: A, B, C, D là các BCNN; E = $\varnothing$, F = Ω.

2.3. Các phép toán và quan hệ giữa các biến cố

2.3.1. Tổng của hai biến cố

Cho hai biến cố A và B. *Tổng* của A với B, ký hiệu A + B (hay $A \cup B$), là một biến cố xảy ra khi **A hoặc B** xảy ra:

$$(A + B \text{ xẩy ra}) \Leftrightarrow (A \text{ xẩy ra } \underline{\textbf{hoặc}} \text{ B xẩy ra}).$$

2.3.2. Tích của hai biến cố

Cho hai biến cố A và B. *Tích* của A và B, kí hiệu A.B (hay AB hoặc $A \cap B$), là biến cố xẩy ra khi **A và B** xẩy ra:

(AB xẩy ra) $\Leftrightarrow$ (A xẩy ra **và** B xẩy ra).

2.3.3. Quan hệ xung khắc và đối lập - Hệ đầy đủ các biến cố

1. Quan hệ xung khắc: Hai biến cố A, B được gọi là *xung khắc* nếu chúng không cùng xẩy ra sau phép thử. Như vậy,

$$(A, B \text{ xung khắc}) \Leftrightarrow (AB = \varnothing).$$

2. Quan hệ đối lập: Hai biến cố A và B được gọi là *đối lập* nếu sau phép thử, một và chỉ một trong chúng phải xẩy ra. Như vậy,

$$(A, B \text{ đối lập}) \Leftrightarrow \begin{cases} AB = \varnothing; \\ A + B = \Omega. \end{cases}$$

Ta ký hiệu B = $\overline{A}$ (đọc là "đối lập của A" hoặc "phủ định của A" hoặc "không A".

3. Hệ đầy đủ các biến cố: Hệ n biến cố A_1, A_2,..., A_n ($1 < n \in$ **N**) được gọi là *hệ đầy đủ* nếu sau phép thử, một và chỉ một biến cố của hệ xảy ra. Như vậy,

$$(\text{Hệ } A_1, A_2, ..., A_n \text{ đầy đủ}) \Leftrightarrow \begin{cases} A_iA_j = \varnothing, 1 \le i < j \le n; \\ A_1 + A_2 + ... + A_n = \Omega. \end{cases}$$

4. Quan hệ độc lập – Hệ độc lập toàn phần

- Hai biến cố A, B được gọi là *độc lập* nếu sự xẩy ra của biến cố này không hề ảnh hưởng đến khả năng xẩy ra của biến cố kia.

- Hệ n biến cố A_1, A_2, …, A_n ($1 < n \in$ **N**) được gọi là *độc lập toàn phần* nếu mỗi một trong chúng độc lập với tích các biến cố còn lại.

<u>Chú ý</u>: - Hai biến cố đối lập thì xung khắc nhưng hai biến cố xung khắc thì chưa chắc đối lập.

- Hai biến cố xung khắc hay đối lập thì chắc chắn không độc lập.

2.3.4. Vài ví dụ

1. Ví dụ 4: Một sinh viên độc lập thi hai môn Toán, Lý. Gọi T là biến cố sinh viên đó đậu Toán, L là biến cố sinh viên đó đậu Lý.

Khi đó T, L là hai biến cố độc lập, không xung khắc cũng không đối lập.

Xét các biến cố dưới đây.

A: Sinh viên đó bị rớt môn Toán; B: Sinh viên đó đậu cả hai môn;
C: Sinh viên đó đậu ít nhất 1 môn; D: Sinh viên đó bị rớt cả hai môn;
E: Sinh viên đó chỉ đậu môn Lý; F: Sinh viên đó chỉ đậu một môn;
G: Sinh viên đó đậu không quá một môn.

Ta có: A = $\overline{T}$: Sinh viên đó rớt môn Toán; $\overline{L}$: Sinh viên đó rớt môn Lý;

B = TL; C = T + L = T.$\overline{L}$ + $\overline{T}$.L + TL; D = $\overline{T}.\overline{L}$;

E = $\overline{T}$.L; F = T.$\overline{L}$ + $\overline{T}$.L; G = $\overline{T}.\overline{L}$ + T.$\overline{L}$ + $\overline{T}$.L .

2. Ví dụ 5: Gieo một con súc sắc (hình lập phương gồm 6 mặt cân đối đồng chất) trên mặt phẳng nằm ngang. Gọi A_k là biến cố xuất hiện mặt k chấm, L là biến cố xuất hiện mặt có số chấm lẻ, C là biến cố xuất hiện mặt có số chấm chẵn.

Khi đó, ta có:

- Hệ 6 biến cố A_1, A_2, ..., A_6 là hệ đầy đủ.
- C = $A_2 + A_4 + A_6$; L = $A_1 + A_3 + A_5$.

3. ĐỊNH NGHĨA XÁC SUẤT

3.1. Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển

Cho T là một phép thử , A là biến cố có thể xảy ra trong phép thử đó. Giả sử:

- Sau phép thử T có tất cả n trường hợp đồng khả năng có thể xảy ra;
- Trong số đó có m trường hợp làm biến cố A xuất hiện.

Khi đó xác suất của biến cố A, kí hiệu là P(A) được xác định như sau

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{so truong hop lam A xay ra}}{\text{so tat cac truong hop}}}$$

3.2. Ý nghĩa của xác suất: Xác suất của một biến cố là *một số (thường tính ở dạng phần trăm) dùng để "đo" khả năng (dễ hay khó) xẩy ra hiện của biến cố đó* trong phép thử. Xác suất càng lớn, khả năng xẩy ra biến cố càng nhiều. Trong thực tế, xác suất P(A) của biến cố A còn gọi là "*khả năng xảy ra* A".

3.3. Các tính chất của xác suất

3.3.1. *Với mọi biến cố A ta luôn có* $0 \le P(A) \le 1$.

3.3.2. $P(\varnothing) = 0$; $P(\Omega) = 1$.

3.3.3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

3.4. Phương pháp tính xác suất bằng định nghĩa

Để tính xác suất của một biến cố (đơn giản) bằng định nghĩa, ta cần thực hiện các bước sau đây:

- ***Nhận biết hành động (phép thử), tính số n tất cả các trường hợp có thể xảy ra sau hành động.***
- ***Gọi tên biến cố cần tìm xác suất, tính số m các trường hợp làm xuất hiện biến cố đó trong phép thử.***
- ***Áp dụng công thức định nghĩa*** $\frac{m}{n}$ ***tìm xác suất của biến cố đã cho.***

3.5. Các ví dụ

3.5.1. Ví dụ 6: Một chi đoàn có 30 sinh viên nam và 15 sinh viên nữ. Cần chọn ra 8 sinh viên tham gia chiến dịch mùa hè xanh. Tìm xác suất trong nhóm chọn ra có 3 sinh viên nữ. ***Đáp số***: $\frac{C_{15}^3 . C_{30}^5}{C_{45}^8}$.

3.5.2. Ví dụ 7: Đề cương thi môn Triết có 70 câu hỏi. Một sinh viên chỉ ôn 40 câu. Cho biết đề thi tự luận gồm 3 câu thuộc đề cương và nếu sinh viên trả lời đúng ít nhất hai câu thì đậu. Tìm xác suất sinh viên đó đậu môn Triết.

Đáp số: $\frac{C_{40}^2 . C_{30}^1 + C_{40}^3}{C_{70}^3}$.

3.5.3. Ví dụ 8: Tung 2 đồng tiền, mỗi đồng có một mặt sấp và một mặt ngửa. Tìm xác suất được

a) 2 mặt đều sấp. b) 2 mặt đều ngửa. c) 1 mặt sấp và 1 mặt ngửa.

Trong ba biến cố trên, biến cố nào thường xảy ra nhiều hơn?

Đáp số: a) 25%; b) 25%; c) 50%; Biến cố ở câu c) thường xẩy ra nhất.

3.5.4. Ví dụ 9: Lấy ra 8 lá bài từ bộ bài có 52 lá. Tìm xác suất lấy được

a) 3 lá màu đỏ. b) ít nhất 1 lá màu đỏ.

Đáp số: a) $\dfrac{C_{26}^{3}.C_{26}^{5}}{C_{52}^{8}}$; b) $1-\dfrac{C_{26}^{8}}{C_{52}^{8}}$.

4. CÁC CÔNG THỨC TÍNH XÁC SUẤT

4.1. Công thức cộng xác suất

Cho hai biến cố A, B. Cần tính xác suất của A + B theo xác suất của A và B.

4.1.1. Trường hợp các biến cố xung khắc

P(A + B) = P(A) + P(B) nếu A, B **xung khắc**;

$P(A_1 + \ldots + A_k) = P(A_1) + \ldots + P(A_k)$ nếu $A_1, \ldots, A_k$ **xung khắc từng đôi**.

4.1.2. Trường hợp các biến cố bất kỳ, không nhất thiết xung khắc

P(A + B) = P(A) + P(B) – P(AB);

P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) – P(AB) – P(BC) – P(CA) + P(ABC).

4.1.3. Các ví dụ

Ví dụ 10. Một lớp học có 50 sinh viên, trong đó có 35 người đậu môn Toán, 28 người đậu môn Lý, 20 người đậu cả hai môn. Gọi ngẫu nhiên một sinh viên của lớp. Tìm xác suất sinh viên đó đậu ít nhất một môn.

Đáp số: $\dfrac{35+28-20}{50}$ = 86%.

Ví dụ 11. Trong hộp phấn có 50 viên gồm 10 viên màu và 40 viên trắng. Lấy ngẫu nhiên 5 viên phấn. Tìm xác suất lấy được

a) 1 viên phấn màu. b) Toàn phấn trắng.

c) Nhiều nhất 1 viên phấn màu. d) Ít nhất 1 viên phấn màu.

Đáp số: a) $\dfrac{C_{10}^{1}C_{40}^{4}}{C_{50}^{5}}$; b) $\dfrac{C_{40}^{5}}{C_{50}^{5}}$; c) $\dfrac{C_{10}^{1}C_{40}^{4}}{C_{50}^{5}}+\dfrac{C_{40}^{5}}{C_{50}^{5}}$; d) $1-\dfrac{C_{40}^{5}}{C_{50}^{5}}$.

4.2. Xác suất có điều kiện và công thức nhân xác suất

4.2.1. Xác suất có điều kiện: Cho hai biến cố A, B. Giả sử B đã xảy ra rồi. Khi đó xác suất của A được tính trong điều kiện B đã xảy ra gọi là *xác suất có điều kiện*, ký hiệu P(A/B) – đọc là "*xác suất của A trong điều kiện B (đã xảy ra)*". Tương tự P(B/A) là "xác suất của B trong điều kiện A (đã xảy ra)".

4.2.2. Nhận xét: Sự khác nhau giữa xác suất (vô điều kiện) P(A) với xác suất có điều kiện P(A/B) cho ta biết A, B không độc lập. Tương tự đối với P(B) và P(B/A). Nói cách khác, ta có

$$\text{(A, B độc lập)} \Leftrightarrow \begin{cases} P(A) = P(A/B); \\ P(B) = P(B/A). \end{cases}$$

4.2.3. Công thức nhân xác suất

(1) Trường hợp các biến cố độc lập

P(AB) = P(A) P(B) nếu A, B **độc lập**;

$P(A_1A_2\ldots A_k) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_k)$ nếu $A_1, A_2, \ldots, A_k$ **độc lập toàn phần**.

(2) Trường hợp các biến cố tùy ý, không nhất thiết độc lập

P(AB) = P(A) P(B/A) = P(B) P(A/B);

$P(A_1A_2\ldots A_k) = P(A_1)P(A_2/A1)\ldots P(A_k/A_1\ldots A_{k-1})$.

4.2.4. Các ví dụ

Ví dụ 12. Một sinh viênđộc lập thi Toán và Lý . Cho biết xác suất đậu hai môn đó lần lượt là 0,9; 0,8. Hãy tính các xác suất sau đây:

a) Sinh viên đó rớt cả hai môn. b) Sinh viên đó chỉ đậu Toán.
c) Sinh viên đó đậu cả hai môn. d) Sinh viên đó chỉ đậu một môn.
e) Sinh viên đó đậu không quá một môn. f) Sinh viên đó đậu ít nhất một môn.

Đáp số: a) (1 – 0,9)(1 – 0,8); b) 0,9(1 – 0,8); c) 0,9.0,8;
d) 0,9(1 – 0,8) + (1 – 0,9)0,8; e) (a) + (d) = 1 – (c) ; f) 1 – (a).

Ví dụ 13. Một xạ thủ bắn hai viên đạn, xác suất bắn trúng từng viên lần lượt là 0,6 ; 0,7. Tìm xác suất anh ta bắn trúng

a) Cả hai viên. b) Chỉ viên thứ nhất. c) Chỉ một viên.
d) Ít nhất một viên. e) Không quá một viên.

Đáp số: a) 0,6.0,7; b) 0,6(1 – 0,7); c) 0,6(1 – 0,7) +(1 – 0,6)0,7;
d) 1 – (1 – 0,6)(1 – 0,7); e) (1 – 0,6)(1 – 0,7) + (c).

Ví dụ 14. Một cậu bé có 10 cái bút chì trong đó có 7 bút đen, 3 bút màu. Cậu bé cho anh mình 2 cái bút, sau đó cho chị mình 1 cái bút. Tìm xác suất cậu bé còn lại

a) Toàn bút đen. b) 2 bút màu. c) 1 bút màu.
d) Ít nhất 1 bút màu. e) Không quá 1 bút màu.

Đáp số: a) $\frac{C_3^2}{C_{10}^2}.\frac{1}{8}$; b) $\frac{C_7^2}{C_{10}^2}.\frac{3}{8}+\frac{C_3^1C_7^1}{C_{10}^2}.\frac{6}{8}$; c) $\frac{C_3^2}{C_{10}^2}.\frac{7}{8}+\frac{C_3^1C_7^1}{C_{10}^2}.\frac{2}{8}$;
d) 1 – (a); e) (a) + (c).

4.3. Công thức xác suất đầy đủ và công thức Bayes

4.3.1. Nội dung công thức

Cho hệ đầy đủ các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ và B là biến cố tùy ý xảy ra khi một trong các biến cố của hệ đó xảy ra. Khi đó, ta có

$$\mathbf{P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + \ldots + P(A_n)P(B/A_n)};$$

$$\mathbf{P(A_k/B)} = \frac{P(A_k)P(B/A_k)}{P(B)};\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

4.3.2. Các ví dụ

Ví dụ 15. Cho 3 cái hộp đựng bút hình dáng giống nhau. Hộp thứ nhất có 2 bút đỏ, 8 bút xanh. Hộp thứ hai có 3 bút đỏ, 7 bút xanh. Hộp thứ ba có 4 bút đỏ, 6 bút xanh. Lấy ngẫu nhiên một hộp, từ đó lấy ngẫu nhiên 3 cái bút. Tìm xác suất lấy được

a) 3 bút đỏ. b) 1 bút đỏ. c) Ít nhất một bút đỏ.

Đáp số: a) $\frac{1}{3}(0+\frac{C_3^3}{C_{10}^3}+\frac{C_4^3}{C_{10}^3})$; b) $\frac{1}{3}(\frac{C_2^1C_8^2}{C_{10}^3}+\frac{C_3^1C_7^2}{C_{10}^3}+\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3})$;

c) $1-\frac{1}{3}(\frac{C_8^3}{C_{10}^3}+\frac{C_7^3}{C_{10}^3}+\frac{C_6^3}{C_{10}^3})$.

Ví dụ 16. Có hai lô hàng đựng các thiết bị điện tử. Lô thứ nhất có 3 phế phẩm và 7 sản phẩm tốt. Lô thứ hai có 2 phế phẩm và 6 sản phẩm tốt. Từ lô thứ nhất lấy ra 2 sản phẩm bỏ sang lô thứ hai. Sau đó từ lô thứ hai lấy ra 3 sản phẩm.

a) Tìm xác suất lấy cả 3 sản phẩm lấy ra sau cùng đều tốt.

b) Biết rằng trong 3 sản phẩm lấy ra sau cùng, có ít nhất 1 phế phẩm. Tính xác suất để cả 2 sản phẩm bỏ từ lô thứ nhất vào lô thứ hai là phế phẩm.

Đáp số: a) $\frac{C_7^2}{C_{10}^2}.\frac{C_8^3}{C_{10}^3}+\frac{C_3^2}{C_{10}^2}.\frac{C_6^3}{C_{10}^3}+\frac{C_7^1C_3^1}{C_{10}^2}.\frac{C_7^3}{C_{10}^3}$; b) $\dfrac{\frac{C_3^2}{C_{10}^2}(1-\frac{C_6^3}{C_{10}^3})}{1-(a)}$.

Ví dụ 17. Một nhà máy có ba phân xưởng cùng sản xuất một loại sản phẩm. Phân xưởng thứ nhất sản xuất 25%, phân xưởng thứ hai sản xuất 35%, còn phân xưởng thứ ba sản suất 40% tổng số sản phẩm của cả nhà máy. Tỉ lệ phế phẩm của từng phân xưởng lần lượt là 1%; 3%; 2%. Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm trong kho hàng của nhà máy.

a) Tìm xác suất lấy được phế phẩm.

b) Giả sử đã lấy được phế phẩm, tìm xác suất phế phẩm đó do phân xưởng thứ nhất sản xuất.

Đáp số: a) 0,25.0,01 + 0,35.0,03 + 0,4.0,02; b) (0,25.0,01) : (a).

4.4. Công thức Bernoulli

4.4.1. Nội dung công thức

- Giả sử, mỗi lần thực hiện phép thử T, xác suất xảy ra A (xác suất thành công) là P(A) = p (0 < p < 1) không đổi. Đặt q = 1 – p = P($\overline{A}$) là xác suất không xảy ra A sau một lần thử.
- Ta thực hiện phép thử T lặp đi lặp lại n lần một cách độc lập.
- Ký hiệu $P_n(k)$ là xác suất A xảy ra đúng k lần trong n lần thử; $P_n(k_1;k_2)$ là xác suất A xảy ra từ k_1 lần đến k_2 lần trong n lần thử ($0 \le k \le n$; $0\le k_1<k_2\le n$).

Khi đó ta có

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k};\ 0 \le k \le n.$$

$$P_n(k_1;k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k};\ 0\le k_1<k_2\le n.$$

4.4.2. Số nhiều khả năng nhất

Số k_0 sao cho $P_n(k_0)$ lớn nhất so với tất cả các xác suất $P_n(0)$, $P_n(1)$, …, $P_n(n)$ được gọi là số nhiều khả năng nhất số chắc chắn nhất. Ta có

$$\boxed{k_0 = \left[\begin{array}{lll} np-q \ \text{ hay } \ np-q+1 & \text{khi} & np-q \in \mathbb{Z}; \\ \quad [np-q]+1 & \text{khi} & np-q \notin \mathbb{Z}. \end{array}\right.}$$

4.4.2. Các ví dụ

Ví dụ 18. Một sinh viên thi 5 môn với xác suất đậu từng môn là 0,7. Tìm xác suất sinh viên đó

a) Đậu 3 môn. b) Không đậu môn nào. c) Đậu ít nhất một môn.

Đáp số: Dùng Bernoulli với n = 5; p = 0,7; q = 0,3.

a) $P_5(3) = \ldots$; b) $P_5(0) = \ldots$; c) $1 - P_5(0) = \ldots$.

Ví dụ 19. Một xạ thủ đã bắn 6 viên đạn. Cho biết xác suất bắn trúng mục tiêu của mỗi lần bắn đều là 0,9. Tìm xác suất anh ta bắn trúng

a) 4 viên. b) không quá 2 viên. c) ít nhất một viên đạn.

Đáp số: Dùng Bernoulli với n = 6; p = 0,9; q = 0,1.

a) $P_9(4) = \ldots$; b) $P_9(0; 2) = \ldots$; c) $1 - P_9(0) = \ldots$.

5. LƯỢC ĐỒ GIẢI BÀI TOÁN XÁC SUẤT

Để giải một bài toán xác suất, ta cần tuân thủ lược đồ dưới đây.

- **Bước 1** Đọc đề bài (chưa cần chú ý đến các số liệu cụ thể), nhanh chóng phát hiện hành động (tức là phép thử) của bài toán.
  - Nếu thấy hành động được **lặp đi lặp lại nhiều lần độc lập** và trong mỗi lần **XS thành công đều như nhau** thì dùng công thức Bernoulli. Chỉ cần xác định số lần lặp n, XS thành công p trong 1 lần thử rồi tính toán XS ngay theo yêu cầu đề bài.
  - Nếu hành động không lặp lại hoặc lặp lại nhưng không độc lập hoặc lặp lại độc lập nhưng XS thành công thay đổi tùy theo mỗi lần thì **cần căn cứ vào các kết cục có thể xẩy ra sau hành động** và **căn cứ vào yêu cầu đề bài** để **đặt tên các biến cố** và tóm tắt yêu cầu cần tính xác suất nào.
- **Bước 2** Xét quan hệ giữa các biến cố cần tính xác suất và các biến cố đơn giản hơn để **quyết định cần dùng công thức nào** trong các công thức cộng , nhân xác suất đầy đủ hay Bayes.
  - Rõ ràng khi gặp các biến cố tổng hay tích thì dùng các công thức cộng, nhân xác suất.
  - Khi thấy xuất hiện một hệ đầy đủ các biến cố hoặc thấy hành động được chia hai giai đoạn, các kết cục của giai đoạn sau phụ thuộc vào từng kết cục của giai đoạn đầu thì nói chung là dùng công thức xác suất đầy đủ hoặc Bayes.

- **Bước3** Đọc kỹ các số liệu đã cho trong giả thiết của bài toán để ráp vào các công thức đã dùng và tính toán đến đáp số.

6. ĐẠI LƯỢNG NGẪU NHIÊN

6.1. Mô tả khái niệm đại lượng ngẫu nhiên

6.1.1. Đại lượng ngẫu nhiên (ĐLNN) hay biến ngẫu nhiên (BNN) là một *đại lượng* (tức là có giá trị; cân, đong, đo, đếm được) có thể *nhận giá trị này hay khác một cách ngẫu nhiên với những xác suất nhất định*.

6.1.2. Có thể hình dung mỗi ĐLNN như là việc gắn một phép thử với một tập giá trị số xác định nào đó sao cho mỗi kết quả của phép thử tương ứng với duy nhất một giá trị số nhất định (thuộc tập giá trị số đó) với một xác suất xác định.

6.2. Chú ý

6.2.1. ĐLNN hoàn toàn khác biến cố ngẫu nhiên (BCNN).

- ĐLNN có thể nhận giá trị này, kia và không có xác suất.
- BCNN không nhận giá trị nào nhưng lại có một xác suất xác định trong những điều kiện xác định.

6.2.2. Nhưng ĐLNN và BCNN lại có quan hệ mật thiết với nhau. Giả sử X là một ĐLNN bất kỳ. Khi ta gán cho X một điều kiện nào đó về giá trị, ta sẽ nhận được các BCNN: $(X = x)$, $(X < x)$, $(X > x)$, $(a < X < b)$, … … .

6.3. Các ví dụ

6.3.1. Ví dụ 20: Học kỳ này, một sinh viên phải thi 5 môn. Gọi Đ là số môn thi sinh viên đó thi đậu. Khi đó Đ là một ĐLNN nhận giá trị thuộc tập {0, 1, 2, 3, 4, 5}. Ta viết Đ = {0, 1, 2, 3, 4, 5}. Nói chung, các biến cố (Đ = i), (a<Đ<b), … có xác suất xác định; i = 0, 1, 2, 3, 4, 5; a và b là hai sô thực tùy ý, a < b.

6.3.2. Ví dụ 21: Gọi T là nhiệt độ lớp học suốt buổi học. Khi đó T là một ĐLNN nhận giá trị, chẳng hạn thuộc $[20^o, 30^o]$. Ta viết $T = [20^o, 30^o]$. Nói chung, các biến cố $(T = t^o)$, $(a^o \le T < b^o)$, … có xác suất xác định.

6.3.3. Ví dụ 22: Gọi S là sô khách hàng đến giao dịch tại một ngân hàng trong một tháng. Khi đó S là một ĐLNN nhận giá trị trong tập số tự nhiên N = {0,1,2,…}. Ta viết S = {0, 1, 2, 3, … }. Nói chung, các biến cố $(S = n)$, $(m \le S \le n)$ có xác suất xác định.

6.4. Phân loại các đại lượng ngẫu nhiên

6.4.1. ĐLNN rời rạc: là ĐLNN mà tập các giá trị của nó có thể đánh số được thành dãy (hữu hạn hay vô hạn). Như vây, nếu $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ thì X là ĐLNN rời rạc hữu hạn; còn khi $X = \{x_1, x_2, \dots \dots\}$ thì X là ĐLNN rời rạc vô hạn.

Đặc biệt , ĐLNN X = {C} chỉ nhận một giá trị duy nhất C được gọi là ĐL hằng và được viết là X = C.

6.4.2. ĐLNN liên tục: là ĐLNN mà tập các giá trị của nó lấp đầy một khoảng hay đoạn nào đó.

6.4.3. Ví dụ 23: ĐLNN trong Ví dụ 20 là một ĐLNN rời rạc hữu hạn, ĐLNN trong Ví dụ 21 là một ĐLNN liên tục, ĐLNN trong Ví dụ 22 là một ĐLNN rời rạc vô hạn.

6.5. Quy luật phân phối xác suất của đại lượng ngẫu nhiên

6.5.1. Bảng phân phối xác suất của ĐLNN rời rạc

1. Khái niệm: Cho X = {x_1, x_2, …, x_n (, …)} là một ĐLNN rời rạc hữu hạn (vô hạn). Đặt $p_i = P(X = x_i), i = 1, 2, ..., n$ (,...).

Khi đó bảng sau đây được gọi là *bảng phân phối xác suất* của X:

X	x_1	x_2 …	x_n (…)
P	p_1	p_2 …	p_n (…)

Bảng phân phối xác suất có các tính chất sau

(1) $0 \le p_i \le 1$; (2) $\sum_i p_i = 1$; (3) $P(a \le X < b) = \sum_{a \le x_i < b} p_i$.

2. Ví dụ

Ví dụ 24: Gọi X là số môn thi đậu của một sinh viên trong học kì phải thi 5 môn. Khi đó X nhận các giá trị: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Giả sử X có bảng phân phối xác suất dưới đây.

X	0	1	2	3	4	5
P	0,05	0,15	0,3	0,33	0,15	0,02

Từ bảng ta có xác suất thi đậu 4 môn của sinh viên đó là 0,15; xác suất thi đậu cả 5 môn là 0,02. Trong các xác suất ta thấy $P(X = 3)$ lớn nhất nên khả năng sinh viên đậu 3 môn là nhiều nhất.

Ví dụ 25: Một xạ thủ được phép bắn 3 viên đạn. Gọi X là số viên đạn anh ta bắn trúng bia. Hãy lập bảng phân phối xác suất của X trong hai trường hợp sau:

a) Biết xác suất bắn trúng mục tiêu của mỗi viên đạn đều 0,8.

b) Biết xác suất bắn trúng mục tiêu của ba viên đạn lần lượt là 0,7; 0,8; 0,9.

6.5.2. Hàm phân phối xác suất của ĐLNN bất kỳ

1. Khái niệm: Cho X là một ĐLNN tùy ý (rời rạc hoặc liên tục). Hàm số

$$F(x) := P(X \le x);\ x \in \mathbf{R}$$

được gọi là *hàm phân phối xác suất* của X.

2. Tính chất: Hàm phân phối xác suất (PPXS) có các tính chất sau

(1) F(x) là hàm không giảm;

(2) $0 \le F(x) \le 1$, $\forall x \in$ R;

(3) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$; $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$;

(4) P(a < X ≤ b) = F(b) – F(a), với mọi a, b ∈ R , a < b.

(5) (F(x) liên tục) ⇔ (X liên tục).

3. Ngược lại, nếu F(x) là hàm số xác định trên **R** và có các tính chất (1), (2), (3) thì F(x) là hàm phân phối xác suất của một ĐLNN X nào đó.

Nếu X là ĐLNN rời rạc hữu hạn có bảng phân phối xác suất

X	x_1	x_2 …	x_n (…)
P	p_1	p_2 …	p_n (…)

trong đó $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, thì hàm phân phối xác suất của X là

$$F(x) = \sum_{x_i \le x} p_i = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad x < x_1 \\ p_1 & \text{nếu} \quad x_1 \le x < x_2 \\ p_1 + p_2 & \text{nếu} \quad x_2 \le x < x_3, \ldots \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} & \text{nếu} \quad x_{n-1} \le x < x_n \\ 1 & \text{nếu} \quad x_n \le x \end{cases}$$

6.5.3. Hàm mật độ xác suất của ĐLNN liên tục

1. Khái niệm: Cho X là một ĐLNN liên tục nhận giá trị trong khoảng (a, b) ($-\infty \le a < b \le +\infty$) hay đoạn [a, b] (khi a, b hữu hạn). Hàm *mật độ xác suất* của X là hàm số *f*(x) xác định trên (a, b) hay [a, b] bởi hệ thức dưới đây.

$$f(x) := \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x > 0)}} \frac{P(x - \Delta x < X < x + \Delta x)}{2\Delta x}; \; x \in (a, b) \text{ hay } [a, b].$$

2. Tính chất: Cho X là một ĐLNN liên tục nhận giá trị trong khoảng (a, b) ($-\infty \le a < b \le +\infty$) hay đoạn [a, b] (khi a, b hữu hạn) với hàm mật độ xác suất $f(x)$ và hàm PPXS F(x). Ta có

(1) $f(x) \ge 0, \forall x \in (a, b)$; (2) $\int_a^b f(x)dx = 1$;

(3) $P(\alpha < X < \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)dx; \; \alpha, \beta \in (a, b)$.

(4) Nếu F(x) khả vi thì F'(x) = f(x), $\forall x \in (a, b)$.

(5) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \forall x \in \mathbb{R}$.

6.5.4. Các đặc trưng của đại lượng ngẫu nhiên

1. Kì vọng: Cho X là một ĐLNN. *Kì vọng của X*, ký hiệu E(X), là giá trị trung bình theo xác suất của X. Có thể hình dung E(X) là giá trị mà X có thể nhận hoặc giao động xung quanh đó với xác suất lớn nhất.

2. Phương sai: Cho X là một ĐLNN. *Phương sai* của X, ký hiệu D(X) hay Var(X) là số được xác định bởi:

$$D(X) := E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 \geq 0.$$

Phương sai của X chính là trung bình của bình phương sai số (độ lệch) giữa X và kì vọng của X.

3. Độ lệch chuẩn: Số $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}\ (\geq 0)$ được gọi là *độ lệch chuẩn* của X. Đó chính là trung bình của sai số (độ lệch) giữa X và E(X).

Khi X là ĐLNN rời rạc có bảng phân phối xác suất

X	x_1	x_2 …	x_n (…)
P	p_1	p_2 …	p_n (…)

thì $E(X) = \sum_i x_i p_i$; $E(X^2) = \sum_i x_i^2 p_i$; $D(X) = \sum_i x_i^2 p_i - \left(\sum_i x_i p_i\right)^2$.

4. Quan hệ và các phép toán trên các ĐLNN

- Hai ĐLNN được gọi là *độc lập* nếu việc ĐLNN này nhận giá trị nào không hề ảnh hưởng đến PPXS của ĐLNN kia. Nếu trái lại, ta bảo hai ĐLNN đó *phụ thuộc*.

- Ta sẽ chỉ xét phép toán cộng và nhân đối với các ĐLNN rời rạc hữu hạn độc lập và trên các ví dụ cụ thể.

Ví dụ 26: Cho hai ĐLNN độc lập X và Y có bảng PPXS như sau

X	0	1	2
P	0,2	0,3	0,5

Y	– 1	1	2
P	0,4	0,3	0,3

Hãy lập bảng phân phối xác suất của các đại lượng X + Y, XY.

<u>*Giải*</u> Đối với từng phép toán, ta lập bảng ghi các giá trị và xác suất tương ứng.

X Y	0 0,2	1 0,3	2 0,5
–1 0,4	–1 0,08	0 0,12	1 0,20
1 0,3	1 0,06	2 0,09	3 0,15
2 0,3	2 0,06	3 0,09	4 0,12

Bảng X + Y

X Y	0 0,2	1 0,3	2 0,5
–1 0,4	0 0,08	–1 0,12	–2 0,20
1 0,3	0 0,06	1 0,09	2 0,15
2 0,3	0 0,06	2 0,09	4 0,15

Bảng XY

Từ **Bảng X + Y** suy ra

X + Y = { – 1, 0, 1, 2, 3, 4}.

P (X + Y = – 1) = 0,08; P (X + Y = 0) = 0,12;

P (X + Y = 1) = 0,20 + 0,06 = 0,26 ; P (X + Y = 2) = 0,09 + 0,06 = 0,15;

P (X + Y = 3) = 0,15 + 0,09 = 0,24; P (X + Y = 4) = 0,15.

Vậy, bảng phân phối xác suất của X + Y là

X+Y	– 1	0	1	2	3	4
P	0,08	0,12	0,26	0,15	0,24	0,15

Từ **Bảng XY** suy ra
XY = {–2, – 1, 0, 1, 2, 4}.
P (XY = –2) = 0,20 ,
P (XY = –1) = 0,12 ,
P (XY = 0) = 0,08 + 0,06 + 0,06 = 0,20 ,
P (XY = 1) = 0,09 ,
P (XY = 2) = 0,15 + 0,09 = 0,24 ,
P (XY = 4) = 0,15.
Vậy, bảng phân phối xác suất của XY là

XY	–2	–1	0	1	2	4
P	0,20	0,12	0,20	0,09	0,24	0,15

5. Tính chất của các đặc trưng

(1) E(C) = C, D(C) = 0, C là ĐL hằng.
(2) E(CX) = C.E(X), D(CX) = C^2.D(X).
(3) E(X ± Y) = E(X) ± E(Y) khi X, Y tùy ý.
(4) D(X ± Y) = D(X) + D(Y) khi X, Y độc lập.
(5) E(X.Y) = E(X).E(Y) khi X, Y độc lập.

Ví dụ 27: Tính kì vọng, phương sai của X, Y, X + Y và kì vọng của XY.

6.6. Một số phân phối xác suất thông dụng

6.6.1. Phân phối nhị thức B(n, p)

Cho số tự nhiên dương n và số thực p (0 < p < 1). ĐLNN rời rạc hữu hạn X = {0, 1, 2, …, n} được gọi là có *phân phối nhị thức* kiểu B(n, p), ký hiệu X~B(n,p) nếu

$$P_k = P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}\ ;\ q = 1 - p,\ 0 \le k \le n.$$

Khi đó E(X) = np ; D(X) = npq.

Như vậy: ***Giả sử mỗi lần thử, xác suất thành công là p (0 <p < 1). Lặp phép thử n lần độc lập. Gọi X là số lần thành công trong n lần thử. Khi đó X ~ B(n, p)***.

Ví dụ 28: Tỉ lệ phế phẩm của một nhà máy là 3%. Chọn ngẫu nhiên 15 sản phẩm trong kho hàng của nhà máy. Gọi X là số phế phẩm có trong 15 sản phẩm đó. Tìm phân phối xác suất của X và tính kì vọng, phương sai, độ lệch chuẩn của X.
Đáp số: X ~ B(15; 0,03); E(X) = 15. 0,03 = 0,45; D(X) = 15. 0,03(1 – 0,03).

6.6.2. Phân phối siêu bội H(N, M, n)

Cho các số tự nhiên n, N, M sao cho 0 < n ≤ M < N. ĐLNN rời rạc hữu hạn X = {0, 1, 2, …, n} được gọi là có *phân phối siêu bội* kiểu *H(N, M, n)*, ký hiệu X~H(N, M, n) nếu

$$P_k = P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}\ ;\ 0 \le k \le n.$$

Khi đó $E(X) = np$; $D(X) = npq\frac{N-n}{N-1}$ với $p = \frac{M}{N}$; $q = 1 - p = \frac{N-M}{N}$.

Như vậy: ***Giả sử có lô hàng N sản phẩm trong đó có M sản phẩm loại I. Chọn ngẫu nhiên (không hoàn lại) n sản phẩm từ lô hàng ($0 < n \le M < N$). Gọi X là số sản phẩm loại I trong n sản phẩm đã chọn. Khi đó***

X ~ H(N, M, n).

Ví dụ 29. Một lô hàng có 30 sản phẩm, trong đó có 10 phế phẩm. Chọn ngẫu nhiên (không hoàn lại) 5 sản phẩm. Gọi X là số phế phẩm trong 5 sản phẩm đó. Tìm phân phối xác suất của X và tính kì vọng, phương sai của X.

Đáp số: X ~ H(30, 10, 5); E(X) = 5(10/30); D(X) = 5(10/30)(20/30)(25/29).

6.6.3. *Phân phối Poinson P(a)*

Cho số thực a > 0. Đại lượng ngẫu nhiên rời rạc vô hạn X = {0, 1, 2, ...} được gọi là có phân phối Poisson kiểu P(a) (a được gọi là tham số), kí hiệu X~P(a), nếu

$$P_k = P(X = k) = \frac{e^{-a}a^k}{k!};\ k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Khi đó E(X) = D(X) = a.

Người ta chứng được rằng số lượng phần tử đầu vào của mỗi hệ phục vụ công cộng đều có phân phối Poisson kiểu P(a) với a thích hợp (a thường được ước lượng bằng phương pháp thống kê).

6.6.4. Phân phối chuẩn và chuẩn tắc

1. Phân phối chuẩn: Cho μ là một hằng số, σ là một hằng số dương bất kỳ. ĐLNN liên tục X gọi là có *phân phối chuẩn* kiểu $N(\mu; \sigma^2)$, ký hiệu $X \sim N(\mu; \sigma^2)$, nếu X có hàm PPXS như sau:

$$F(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt\ ; x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó $E(X) = \mu$; $D(X) = \sigma^2$; $\sigma(X) = \sigma$.

2. Phân phối chuẩn tắc: Nếu $X \sim N(0; 1)$ thì ta nói X có phân phối chuẩn tắc. Khi đó hàm PPXS của X được gọi là ***hàm phân phối Gauss*** và xác định như sau:

$$F(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\ ; x \in \mathbb{R}\ \text{(có bảng để tra).}$$

Người ta còn xét hàm Laplace như sau:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt\,; x \in \mathbb{R} \text{ (có bảng để tra).}$$

Hàm Laplace có các tính chất sau:

(1) $\varphi(x)$ là hàm lẻ, tức là $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, với mọi $x > 0$.

(2) $\varphi(0) = 0$; $\varphi(3) \approx 0{,}4997$; $\varphi(x) \approx 0{,}5$, $\forall x > 3$.

(3) $F(x) = 0{,}5 + \varphi(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Do đó chỉ cần biết bảng của $\varphi(x)$ với $0 < x \le 3$, ta có thể tính được $F(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

3. Chú ý: Mọi ĐLNN có phân phối chuẩn đều có thể chuẩn tắc hóa, cụ thể là

$$(X \sim N(\mu; \sigma^2)) \Leftrightarrow \left(Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0;1)\right).$$

4. Tính chất: Nếu $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ thì ta có

$$P(\alpha < X < \beta) = \varphi\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right);$$

$$P(|X| < \alpha) = 2\varphi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right), \alpha > \mu;$$

$$P(X > \alpha) = 0{,}5 - \varphi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right) = 1 - F\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right);$$

$$P(X < \beta) = 0{,}5 + \varphi\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right) = F\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right).$$

Ở đây, $F(x)$ là hàm phân phối Gauss, $\varphi(x)$ là hàm Laplace.

6.6.5. Chý ý trong thực hành

1. Giả sử có lô hàng N sản phẩm trong đó có M sản phẩm loại I. Chọn ngẫu nhiên lần lượt n sản phẩm từ lô hàng ($0 < n \le M < N$). Gọi X là số sản phẩm loại I trong n sản phẩm đã chọn. Khi đó ta có:

- Nếu n sản phẩm được chọn ***<u>không hoàn lại</u>*** thì X có phân phối siêu bội kiểu H(N, M, n).

- Nếu n sản phẩm được chọn ***<u>có hoàn lại</u>*** thì X có phân phối nhị thức B(n, p) với p = $\frac{M}{N}$.

- Khi N rất lớn, n quá nhỏ so với N thì sự khác biệt giữa lấy hoàn lại và không hoàn lại là không đáng kể, ta có thể xấp xỉ phân phối siêu bội với phân phối nhị thức.

- Khi n khá lớn, p khá bé (p < 0,1), phân phối nhị thức B(n, p) có thể xấp xỉ với phân phối Poisson P(np).

- Khi n khá lớn và p không quá bé không quá lớn (0,1<p<0,9), phân phối nhị thức B(n, p) có thể xấp xỉ với phân phối chuẩn N(np, npq) với q = 1 – p. Khi đó

$$P(X = k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} f\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

$$P(k_1 \le X \le k_2) \approx \varphi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \varphi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right) \approx F\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - F\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right);$$

với $f(x)$ là hàm mật độ phân phối xác suất Gauss, $\varphi(x)$ là tích phân Laplace, F(x) là hàm phân phối chuẩn tắc hay phân phối Gauss.

Tuy nhiên, trong ôn tập thi, ta chỉ ***nhấn mạnh tính đúng XS***. Do đó ***chủ yếu chỉ xét phân phối nhị thức và siêu bội***.

2. *Nếu X là số lượng phần tử đầu vào của một hệ phục vụ công cộng trong một khoảng thời gian nào đó thì $X \sim P(a)$ với tham số a thích hợp. Đặc biệt, khi ta cho số lượng đầu vào trong một số khoảng thời gian thì ta thường lấy* ***a là số lượng phần tử đầu vào trung bình*** *của mỗi khoảng thời gian.*

Ví dụ 30: *Số liệu của một hãng hàng không cho thấy trong 1000 chuyến bay thì có 18 trường hợp hành khách bị mất hành lí. Gọi X là số trường hợp hành khách bị mất hành lí trong một chuyến bay. Tìm xác suất để trong một chuyến bay*

a) Không ai bị mất hành lí.

b) Có một hành khách bị mất hành lí.

Đáp số: *$X \sim P(a)$ với a = 18/1000 = 0,018.*

a) $P(X=0) = \dfrac{e^{-0,018}.0,018^0}{0!} = \dfrac{1}{e^{0,018}}$;

b) $P(X=1) = \dfrac{e^{-0,018}.0,018^1}{1!} = \dfrac{0,018}{e^{0,018}}$.

Ví dụ 31: *Quan sát 5 phút thấy có 15 người ghé vào một đại lí bưu điện. Tìm xác suất trong một phút có 4 người vào đại lí bưu điện đó.*

Đáp số: *Gọi X là số người ghé vào bưu điện đó trong 1 phút. Ta có $X \sim P(a)$ với a = 15/5 = 3.* $P(X=4) = \dfrac{e^{-3}.3^4}{4!} = \dfrac{27}{8e^3}$.

Ví dụ 32: *Xác suất một hộp sữa trong kho bị hỏng là 0,2%. Chọn ngẫu nhiên 800 hộp trong kho. Tìm xác suất có ít nhất 2 hộp bị hỏng. Tính kì vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của số hộp sữa bị hỏng trong 800 hộp đó.*

Đáp số: *$X \sim B(800; 0,002) \approx P(a)$ với a = 800. 0,002 = 1,6.*

$P(X \geq 2) \approx 1 - P(0) - P(1) = \ldots$;

$E(X) = D(X) \approx 1,6$.

BÀI TẬP

1. Ở một khu vui chơi giải trí có 3 loại dịch vụ A, B, C. Giả sử các khách hàng vào khu vui chơi độc lập chọn dịch vụ vui chơi. Tính xác suất để 3 khách hàng vào khu vui chơi và chọn dịch vụ khác nhau. ***Đáp số***: $P = 3!/3^3 = 2/9$

2. Lớp học môn xác suất có 64 sinh viên, trong đó có 15 sinh viên nữ. Chọn ngẫu nhiên một nhóm gồm 10 sinh viên. Tìm xác suất trong nhóm chọn ra có

a) 4 sinh viên nữ. b) không quá 2 sinh viên nữ.

c) ít nhất 1 sinh viên nữ.

Đáp số: a) $\dfrac{C_{15}^4.C_{49}^6}{C_{64}^{10}}$; b) $\dfrac{C_{49}^{10}+C_{15}^1.C_{49}^9+C_{15}^2.C_{49}^8}{C_{64}^{10}}$; c) $1-\dfrac{C_{49}^{10}}{C_{64}^{10}}$.

3. Từ một cái hộp có 20 viên phấn, trong đó có 5 viên phấn màu, người ta lấy ra 6 viên phấn. Tìm xác suất lấy được

a) 2 viên phấn màu. b) không quá một viên phấn màu.

c) ít nhất một viên phấn màu.

Đáp số: a) $\dfrac{C_5^2.C_{15}^4}{C_{20}^6}$; b) $\dfrac{C_{15}^6+C_5^1.C_{15}^5}{C_{20}^6}$; c) $1-\dfrac{C_{15}^6}{C_{20}^6}$.

4. Có ba người, mỗi người bắn một viên đạn vào bia với xác suất bắn trúng lần lượt là 0,6 ; 0,7 ; 0,8. Tìm các xác suất sau đây:

a) Chỉ có người thứ hai bắn trúng. b) Có đúng một người bắn trúng.

c) Chỉ có người thứ ba bắn trượt. d) Có đúng hai người bắn trúng.

e) Cả ba người đều bắn trúng. f) Không có ai bắn trúng.

g) Có ít nhất một người bắn trúng. h) Có không quá hai người bắn trúng.

Đáp số: a) (1 – 0,6)0,7(1 – 0,8);

b) 0,6(1 – 0,7)(1 – 0,8) + (1 – 0,6)0,7(1 – 0,8) + (1 – 0,6)(1 – 0,7)0,8;

c) 0,6.0,7(1 – 0,8);

d) 0,6.0,7(1 – 0,8) + 0,6(1 – 0,7)0,8 + (1 – 0,6).0,7.0,8;

e) 0,6.0,7.0,8; f) (1 – 0,6)(1 – 0,7)(1 – 0,8);

g) 1 – (f); h) (f) + (b) + (d).

5. Có hai lô hàng, lô thứ nhất có 10 sản phẩm loại A, 2 sản phẩm loại B; lô thứ hai có 16 sản phẩm loại A, 4 sản phẩm loại B. Từ mỗi lô ta lấy ngẫu nhiên ra một sản phẩm. Sau đó, trong hai sản phẩm thu được lại lấy ra một sản phẩm. Tìm xác suất để sản phẩm lấy ra sau cùng là sản phẩm loại A.

Đáp số: $\dfrac{10}{12}.\dfrac{16}{20}.1+\dfrac{2}{12}.\dfrac{4}{20}.0+\left(\dfrac{10}{12}.\dfrac{4}{20}+\dfrac{2}{12}.\dfrac{16}{20}\right)\dfrac{1}{2}$.

6. Hai máy cùng sản xuất ra một loại chi tiết. Năng suất của máy thứ hai gấp đôi máy thứ nhất. Tỉ lệ chi tiết đạt tiêu chuẩn của máy thứ nhất là 65%, của máy thứ hai là 80%. Lấy ngẫu nhiên một chi tiết từ lô hàng do hai máy sản xuất.

a) Tìm xác suất lấy được chi tiết đạt tiêu chuẩn.

b) Nếu chi tiết đó là phế phẩm, tìm xác suất chi tiết đó do máy thứ hai sản xuất.

Đáp số: a) $\frac{1}{3}.0,65+\frac{2}{3}.0,8$; b) $\dfrac{\frac{2}{3}(1-0,8)}{1-(a)}$.

7. Ở một vùng cứ 100 người thì có 30 người hút thuốc lá. Biết tỉ lệ người bị viêm họng trong số người hút thuốc là 60%, còn trong số người không hút là 10%.
a) Khám ngẫu nhiên một người. Tìm xác suất để người đó bị viêm họng.
b) Giả sử người được khám bị viêm họng. Tìm xác suất anh ta hút thuốc.
c) Nếu người đó không bị viêm họng thì xác suất để anh ta hút thuốc bằng bao nhiêu?
Đáp số: a) 0,3.0,6 + 0,7.0,1; b) (0,3.0,6)/(a) ; c) 0,3(1 – 0,6)/[1 – (a)].

8. Có bốn nhóm xạ thủ tập bắn. Nhóm thứ nhất có 6 người, nhóm thứ hai có 7 người, nhóm thứ ba có 8 người và nhóm thứ tư có 4 người. Xác suất bắn trúng đích của mỗi người trong bốn nhóm đó lần lượt là 0,8 ; 0,7 ; 0,6 ; 0,5. Chọn ngẫu nhiên một xạ thủ.
a) Tìm xác suất để anh ta bắn trúng đích.
b) Giả sử xạ thủ này bắn trượt. Hãy xác định xem người đó nhiều khả năng ở trong nhóm nào nhất?
Đáp số: a) $\frac{6}{25}.0,8+\frac{7}{25}.0,7+\frac{8}{25}.0,6+\frac{4}{25}.0,5$;
b) So sánh để lấy XS lớn nhất trong 4 XS dưới đây

$$\frac{\frac{6}{25}(1-0,8)}{1-(a)};\quad \frac{\frac{7}{25}(1-0,7)}{1-(a)};\quad \frac{\frac{8}{25}(1-0,6)}{1-(a)};\quad \frac{\frac{4}{25}(1-0,5)}{1-(a)}.$$

9. Có ba cái hộp đựng bút. Hộp thứ nhất có 5 bút đỏ, 10 bút xanh. Hộp thứ hai có 3 bút đỏ, 7 bút xanh. Hộp thứ ba có 3 bút đỏ, 4 bút xanh. Từ hộp thứ nhất lấy ra 1 cái bút, từ hộp thứ hai lấy ra 2 cái, cùng bỏ vào hộp thứ ba.
a) Tìm xác suất để trong hộp thứ ba số bút đỏ nhiều hơn số bút xanh.
b) Từ hộp thứ ba lấy ra 2 cái bút. Tìm xác suất lấy được 2 bút cùng màu.

Đáp số: a) $\frac{5}{15}\frac{C_3^2}{C_{10}^2}$;

$$\text{b) } \frac{10}{15}.\frac{C_7^2}{C_{10}^2}.\frac{C_3^2+C_7^2}{C_{10}^2}+\left(\frac{5}{15}.\frac{C_7^2}{C_{10}^2}+\frac{10}{15}.\frac{C_3^1.C_7^1}{C_{10}^2}\right).\frac{C_4^2+C_6^2}{C_{10}^2}+$$
$$+\left(\frac{10}{15}.\frac{C_3^2}{C_{10}^2}+\frac{5}{15}.\frac{C_3^1.C_7^1}{C_{10}^2}\right).\frac{C_5^2+C_5^2}{C_{10}^2}+\frac{5}{15}.\frac{C_3^2}{C_{10}^2}.\frac{C_6^2+C_4^2}{C_{10}^2}.$$

10. Giả sử xác suất sinh con trai trong mỗi lần sinh là 0,51. Một gia đình có sinh 4 người con. Tìm xác suất để gia đình đó có:
a) Hai con trai. b) Không quá một con trai.
Đáp số: Dùng CT Bernoulli với n = 4; p = 0,51; q = 0,49.
a) $P_4(2)$; b) $P_4(0; 1) = P_4(0) + P_4(1)$.

11. Một xạ thủ có xác suất bắn trúng đích ở mỗi lần bắn là 0,7. Anh ta đã bắn 5 lần, mỗi lần 1 viên đạn. Tìm xác suất có 3 viên trúng đích. Tìm xác suất có không quá 3 viên trúng.

Đáp số: Dùng CT Bernoulli với $n = 5$; $p = 0,7$; $q = 0,3$;

Cần tính $P_5(3)$ và $P_5(0; 3) = 1 - P_5(4) - P_5(5)$.

12. Một bài thi trắc nghiệm nhiều lựa chọn gồm 12 câu hỏi. Mỗi câu có 5 phương án trả lời, trong đó chỉ có 1 phương án đúng. Cho biết mỗi câu trả lời đúng được 4 điểm, mỗi câu trả lời sai bị trừ đi 1 điểm. Một sinh viên không học bài nên đã làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên 1 phương án trả lời trong từng câu hỏi. Tìm xác suất anh ta

a) Được 13 điểm. b) Bị điểm âm.

Đáp số: Dùng CT Bernoulli với $n = 12$; $p = 0,2$; $q = 0,8$. Gọi k ($0 \le k \le 12$) là số câu sinh viên đó làm đúng. Điểm của SV đó là $Đ = 4k - (12 - k) = 5k - 12$.

a) $P(Đ = 13) = P_{12}(5)$; b) $P(Đ < 0) = P_{12}(0; 2) = P_{12}(0) + P_{12}(1) + P_{12}(2)$.

13. Một tín hiệu vô tuyến được phát đi 4 lần. Xác suất nơi thu nhận được tín hiệu ở mỗi lần phát đều là 0,4.

a) Tìm xác suất nơi thu nhận được ít nhất một tín hiệu.

b) Muốn xác suất thu được ít nhất một tín hiệu không bé hơn 99% thì phải phát tối thiểu bao nhiêu lần?

Hướng dẫn và đáp số: Dùng CT Bernoulli với $p = 0,4$; $q = 1 - p = 0,6$.

a) $n = 4$; $P_4(1; 4) = 1 - P_4(0)$;

b) Cần tìm n để $1 - P_n(0) \ge 0,99$.

Giải bất phương trình: $0,6^n \le 0,01 \Leftrightarrow n \ge \log_{0,6}0,01 \Leftrightarrow n \ge 10$.

14. Cho một mô hình đơn giản về chứng khoán. Trong mỗi phiên giao dịch, xác suất giá tăng lên một đơn vị là p, còn xác suất giá giảm một đơn vị là $q = 1 - p$. Sự thay đổi giá của các phiên giao dịch là độc lập.

a) Tính xác suất để sau 3 phiên giao dịch liên tiếp giá tăng lên một đơn vị.

b) Giả sử sau 3 phiên giao dịch liên tục giá tăng lên một đơn vị. Tính xác suất giá tăng trong phiên thứ hai.

Hướng dẫn và đáp số: Dùng CT Bernoulli với $n = 3$, p và $q = 1 - p$ đã cho.

a) $P_3(2) = 3p^2q$; b) $2p^2q/3p^2q = 2/3$.

15. Tại một xí nghiệp sản xuất một loại sản phẩm, xác suất để sản phẩm ra lo bị khuyết tật là 10%. Người ta dùng một thiết bị tự động kiểm tra chất lượng loại sản phẩm đó. Thiết bị đó có khả năng phát hiện đúng sản phẩm có khuyết tật với xác suất 85% và phát đúng sản phẩm không bị khuyết tật với xác suất 95%. Chọn ngẫu nhiên 1 sản phẩm đã qua kiểm tra.

a) Tính xác suất để sản phẩm đó bị kết luận sai chất lượng của nó.

b) Biết rằng sản phẩm đó bị kết luận là có khuyết tật, tính xác suất để sản phẩm đó thực chất không bị khuyết tật.

Hướng dẫn và đáp số: Gọi

- X là biến cố sp có khuyết tật; T là biến cố sp không có khuyết tật;
- S là biến cố sp bị kết luận sai; K là biến cố sp bị kết luận là có khuyết tật.

Ta có {X, T} là hệ đầy đủ, $P(X) = 0,1$; $P(T) = 0,9$.

a) P(S) = 0,1(1 – 0,85) + 0,9(1 – 0,95);
b) P(K) = 0,1.0,85 + 0,9(1 – 0,95);

$$P(T/K) = \frac{P(T)P(K/T)}{P(K)} = \frac{0,9(1-0,95)}{P(K)}.$$

16. Một hộp có 9 sản phẩm gồm hai loại chính phẩm hoặc phế phẩm. Mọi giả thiết về số chính phẩm có trong hộp đều đồng khả năng. Một khách hàng rút ngẫu nhiên 1 sản phẩm từ hộp để kiểm tra thì thấy chính phẩm. Khách hàng này dự định sẽ mua hộp sản phẩm đó nếu kiểm tra ngẫu nhiên thêm 1 sản phẩm nữa vẫn được chính phẩm. Tính xác suất để khách hàng này mua hộp sản phẩm đó.

Hướng dẫn và đáp số: Gọi
- C_i là biến cố trong hộp có đúng i chính phẩm; i =0, 1, 2, …, 9.
- L_i là biến cố sp được rút ra kiểm tra ở lần thứ i là chính phẩm ; i = 1, 2.
- M là biến cố khách hàng đó mua hộp sản phẩm.

Ta cần tính P(M). Ta có $\{C_0, C_1, \ldots, C_9\}$ là hệ đầy đủ. Theo giả thiết, ta có

$$P(C_0) = P(C_1) = \ldots = P(C_9) \Rightarrow P(C_i) = 0,1;\ i = 0, 1, \ldots, 9.$$

$P(M) = P(L_2/L_1) = P(L_1L_2)/P(L_1)$;

$$P(L_1) = \sum_{i=0}^{9} P(C_i)P(L_1/C_i) = 0,1(0 + 1/9 + 2/9 + \ldots + 8/9 + 9/9) = 0,5.$$

$$P(L_1L_2) = \sum_{i=0}^{9} P(C_i)P(L_1L_2/C_i)$$

$$= 0,1(0 + 0 + \frac{2}{9}.\frac{1}{8} + \frac{3}{9}.\frac{2}{8} + \frac{4}{9}.\frac{3}{8} + \frac{5}{9}.\frac{4}{8} + \frac{6}{9}.\frac{5}{8} + \frac{7}{9}.\frac{6}{8} + \frac{8}{9}.\frac{7}{8} + \frac{9}{9}.\frac{8}{8}) = \frac{1}{3}.$$

17. Có hai hộp bút. Hộp thứ nhất có 7 bút tím, 6 bút xanh và 2 bút đỏ. Hộp thứ hai có 7 bút tím, 3 bút xanh và 2 bút đỏ. Từ hộp thứ nhất lấy ngẫu nhiên 2 bút rồi bỏ vào hộp thứ hai. Tính xác suất để trong hộp thứ hai mới, số bút xanh khác số bút đỏ biết rằng 2 bút lấy từ hộp thứ nhất bỏ vào là 2 bút khác mầu.

Đáp số: Gọi
- A là biến cố 2 bút lấy từ hộp thứ nhất khác mầu;
- B là biến cố trong hộp thứ hai mới, số bút xanh khác số bút đỏ.

P(B/A) = P(AB)/P(A) với

$$P(A) = \frac{C_7^1C_6^1 + C_7^1C_2^1 + C_6^1C_2^1}{C_{7+6+2}^2};\ P(AB) = \frac{C_7^1C_6^1 + C_6^1C_2^1}{C_{7+6+2}^2}.$$

18. Một xí nghiệp có hai phân xưởng. Phân xưởng thứ nhất có 10 máy, phân xưởng thứ hai có 8 máy. Các máy hoạt động độc lập với nhau. Trong một ngày làm việc, xác suất mỗi máy trong phân xưởng thứ nhất bị hỏng là 0,01; còn xác suất mỗi máy ở phân xưởng thứ hai bị hỏng là 0,02. Tính xác suất để trong một ngày làm việc xí nghiệp có:

a) Máy hỏng ; b) Đúng 2 máy hỏng.

Đáp số: a) $1 - P_{10}(0; 0,01).\ P_8(0; 0,02)$;
b) $P_{10}(0; 0,01).P_8(2; 0,02) + P_{10}(1; 0,01).P_8(1; 0,02) + P_{10}(2; 0,01).P_8(0; 0,02)$.

19. Một ngân hàng cần tuyển nhân viên mới trong số 10 ứng viên gồm 1 sinh viên tốt nghiệp loại giỏi, 4 sinh viên tốt nghiệp loại khá và 5 sinh viên tốt nghiệp loại trung bình của khoa Tài chính Ngân hàng trường ĐHKTL. Xác suất để mỗi sinh viên tốt nghiệp loại giỏi, khá, trung bình được tuyển lần lượt là 0,9 ; 0,7 ; 0,5. Biết rằng ngân hàng chỉ tuyển được đúng 1 nhân viên mới. Tính xác suất để nhân viên mới đó là sinh viên tốt nghiệp loại khá.

Hướng dẫn và đáp số: Dùng CT Bernoulli cho từng lợi Giỏi, Khá, Trung bình.

- Đ là biến cố ngân hàng chỉ tuyển được đúng 1 người.
- K là biến cố người được tuyển là sinh viên tốt nghiệp loại khá.

Cần tính P(K/Đ) = P(ĐK) / P(Đ) với

$P(Đ) = 0,9(1-0,7)^4(1-0,5)^5 + (1-0,9)C_4^1.0,7(1-0,7)^3(1-0,5)^5 +$

$(1-0,9)(1-0,7)^4 C_5^1 0,5^5.$

$P(ĐK) = (1-0,9)C_4^1.0,7(1-0,7)^3(1-0,5)^5.$

20. Một xạ thủ được phát 3 viên đạn và được phép bắn lần lượt từng viên cho đến khi trúng mục tiêu thì dừng bắn. Biết xác suất bắn trúng từng viên đều là 0,8. Gọi X là số viên đạn trúng mục tiêu và Y là số viên đạn anh ta dùng. Hãy lập bảng PPXS, hàm PPXS và tính kì vọng, phương sai, độ lệch chuẩn của X, Y.

Hướng dẫn: X = {0,1} ; Y = {1, 2, 3}.

$P(X = 0) = (1-0,8)(1-0,8)(1-0,8) = 0,008;$

$P(X = 1) = 0,8 + (1-0,8)0,8 + (1-0,8)(1-0,8)0,8 = 0,992.$

$P(Y = 1) = 0,8; P(Y = 2) = (1-0,8)0,8; P(Y = 3) = (1-0,8)(1-0,8).$

21. Một hộp chứa 10 viên phấn trắng và 6 viên phấn màu. Chọn ngẫu nhiên ra 3 viên phấn. Gọi X là số viên phấn màu lấy được. Hãy lập bảng PPXS, hàm PPXS của X. Tính kì vọng, phương sai, độ lệch chuẩn của X.

Đáp số: X~ H(16; 6; 3); E(X) = 3(6/16); D(X) = 3(6/16)(10/16)(13/15).

22. Mỗi tháng, một xí nghiệp chắc chắn có 1, 2 hoặc 3 ngày bị cắt điện. Số ngày bị cắt điện trong các tháng là độc lập. Xác suất để trong một tháng có đúng 1, 2 ngày bị cắt điện lần lượt là 0,5 ; 0,3. Gọi X là số ngày bị cắt điện ở xí nghiệp trong 1 tháng, Y là số ngày bị cúp điện ở xí nghiệp trong 5 tháng liên tiếp.

a) Lập bảng PPXS, hàm PPXS, tính kỳ vọng và phương sai của X.

b) Tính kỳ vọng, phương sai của Y.

Đáp số: a) X = {1, 2, 3}; P(X = 1) = 0,5; P(X = 2) = 0,3;

P(X = 3) = 1 – P(X = 1) – P(X = 2) = 0,2.

b) Gọi X_i là số ngày bị cắt điện ở tháng thứ i (i = 1, 2, 3, 4, 5).

$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_5$; Các X_i độc lập và có cùng phân phối như X.

Do đó, ta có

$E(Y) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_5) = 5E(X) = 5.\ 1,7 = 8.5;$

$D(Y) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_5) = 5D(X) = 5.\ 0,61 = 3,05.$

23. Một sinh viên thi 4 môn, xác suất đậu từng môn là 0,7. Gọi X là số môn anh ta đậu. Hãy lập bảng PPXS xác suất, hàm PPXS và tính kì vọng, phương sai của X.

Đáp số: X ~ B(4; 0,7); E(X) = 4. 0,7 = 2,8; D(X) = 4. 0,7. 0,3 = 0,84.

24. Đề thi trắc nghiệm có 20 câu hỏi, mỗi câu có 4 phương án trả lời, trong đó chỉ có 1 phương án đúng. Một sinh viên không học bài nên khi đi thi đã chọn ngẫu nhiên một phương án cho từng câu hỏi. Gọi X là số câu anh ta trả lời đúng. Hãy tìm phân phối xác suất của X và tính kì vọng, phương sai, độ lệch chuẩn của X.

Đáp số: $X \sim B(20; 0,25)$; $E(X) = 20.\ 0,25 = 5$; $D(X) = 20.\ 0,25.\ 0,75 = 3,75$.

25. Hai đấu thủ A, B chơi cờ. Xác suất để A thắng trong mỗi ván đều là 0,6. Ai thắng một ván thì nhận 1 điểm, thua không được điểm nào. Giả sử các ván đấu không có hòa. A sẽ thắng chung cuộc nếu dành được 3 điểm trước. B sẽ thắng chung cuộc nếu B dành được 5 điểm trước. Gọi X là số ván cần thiết để phân định thắng thua. Lập bảng PPXS, hàm PPXS, tính kỳ vọng và phương sai của X.

Hướng dẫn và đáp số:

A thắng trong các trường hợp sau

- A_1 : Hoặc A thắng 3 ván đầu;
- A_2 : Hoặc A thắng 2 trong 3 ván đầu và thắng ván thứ 4;
- A_3 : Hoặc A thắng 2 trong 4 ván đầu và thắng ván thứ 5;
- A_4 : Hoặc A thắng 2 trong 5 ván đầu và thắng ván thứ 6;
- A_5 : Hoặc A thắng 2 trong 6 ván đầu và thắng ván thứ 7.

B thắng trong các tình huống sau

- B_1 : Hoặc B thắng 5 ván đầu ;
- B_2 : Hoặc B thắng 4 trong 5 ván đầu và thắng ván thứ 6;
- B_3 : Hoặc B thắng 4 trong 6 ván đầu và thắng ván thứ 7.

Như thế X = {3, 4, 5, 6, 7}.

$P(X = 3) = P(A_1) = 0,6^3$;

$P(X = 4) = P(A_2) = C_3^2 0,6^2 0,4\ .\ 0,6$;

$P(X = 5) = P(A_3 + B_1) = C_4^2 0,6^2 0,4^2 .0,6 + 0,4^5$;

$P(X = 6) = P(A_4 + B_2) = C_5^2 0,6^2 0,4^3 .0,6 + C_5^4 0,6^1 0,4^4 .0,4$;

$P(X = 7) = P(A_5 + B_3) = C_6^2 0,6^2 0,4^4 .0,6 + C_6^4 0,6^2 0,4^4 .0,4$.

26. Có 3 hộp, mỗi hộp đựng 10 sản phẩm. Số phế phẩm có trong mỗi hộp tương ứng là 1, 2, 3.

a) Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra một sản phẩm. Gọi X là <u>số sản phẩm tốt</u> có trong 3 sản phẩm lấy ra. Tìm bảng phân phối xác suất của X và tính E(X), D(X).

b) Chọn ngẫu nhiên một hộp, rồi từ hộp đã chọn lấy ra ngẫu nhiên 3 sản phẩm. Gọi Y là <u>số phế phẩm</u> có trong 3 sản phẩm lấy ra. Tìm bảng phân phối xác suất của Y và tính E(Y), D(Y).

Đáp số: a) X = {0, 1, 2, 3};

$P(X = 0) = \frac{1}{10}.\frac{2}{10}.\frac{3}{10}$; $P(X = 1) = \frac{9}{10}.\frac{2}{10}.\frac{3}{10} + \frac{1}{10}.\frac{8}{10}.\frac{3}{10} + \frac{1}{10}.\frac{2}{10}.\frac{7}{10}$;

$P(X = 2) = \frac{9}{10}.\frac{8}{10}.\frac{3}{10} + \frac{9}{10}.\frac{2}{10}.\frac{7}{10} + \frac{1}{10}.\frac{8}{10}.\frac{7}{10}$; $P(X = 3) = \frac{9}{10}.\frac{8}{10}.\frac{7}{10}$.

b) Y = {0, 1, 2, 3};

$P(Y = 0) = \frac{1}{3}.\frac{C_9^3 + C_8^3 + C_7^3}{C_{10}^3}$; $P(Y = 1) = \frac{1}{3}.\frac{C_1^1 C_9^2 + C_2^1 C_8^2 + C_3^1 C_7^2}{C_{10}^3}$;

$P(Y = 2) = \frac{1}{3}.\frac{0 + C_2^2 C_8^1 + C_3^2 C_7^1}{C_{10}^3}$; $P(Y = 3) = \frac{1}{3}.\frac{0 + 0 + C_3^3}{C_{10}^3}$.

27. Một hộp đựng 10 sản phẩm trong đó có 3 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên từng sản phẩm cho đến khi lấy được sản phẩm tốt thì dừng. Gọi X là số sản phẩm lấy ra. Lập bảng phân phối xác suất và tính kì vọng, phương sai của X.

Đáp số: X = {1, 2, 3, 4}; P(X = 1) = 7/10; P(X = 2) = (3/10)(7/9);
P(X = 3) = (3/10)(2/9)(7/8); P(X = 4) = (3/10)(2/9)(1/8).

PHẦN 2

THỐNG KÊ TOÁN HỌC

1. LÝ THUYẾT MẪU

1.1. Tổng thể và mẫu

1.1.1. Tổng thể: Tập hợp tất cả các phần tử mà ta quan tâm nghiên cứu trong bài toán thống kê nào đó được gọi là ***tổng thể***. Số phần tử của tổng thể được gọi là ***dân số*** của tổng thể. Dân số thường là lớn – có thể vô hạn.

1.1.2. Mẫu: Một tập con các phần tử được lấy ra từ tổng thể theo một cách nào đó để phản ánh trung thành tổng thể được gọi là ***mẫu***. Số phần tử của mẫu được gọi là ***kích thước mẫu*** hay ***cỡ mẫu*** . Kích thước mẫu thường là nhỏ hơn nhiều so với dân số.

1.1.3. Phương pháp mẫu: Phương pháp mẫu là cách thức chúng ta phân tích dữ liệu trên mẫu rồi rút ra kết luận cho tổng thể.

1.2. Phân loại mẫu

1.2.1. Mẫu định tính: là mẫu mà ta chỉ quan tâm xem các phần tử trong mẫu có tính chất T nào đó hay không. Khi đó mẫu được cho ở dạng:

- Kích thước mẫu: n
- Số phần tử có tính chất T của mẫu: k (còn gọi là tần số mẫu)

1.2.2. Mẫu định lượng (gắn với một ĐLNN X): là mẫu mà ta cần quan tâm xem xét đến các giá trị mà ĐLNN X có thể nhận trên từng phần tử trong mẫu. Khi đó mẫu được cho ở dạng :

- Kích thước mẫu: n
- Giá trị của các phần tử: $x_1, x_2, ..., x_n$

Nếu mẫu có các phần tử có giá trị giống nhau thì thường được cho ở dạng bảng phân phối tần số mẫu như sau:

X	x_1	x_2 ...	x_m
Tần số	n_1	n_2 ...	n_m

Ở đây, n_i là số phần tử của mẫu mà X nhận giá trị x_i. Nếu n_i là số phần tử của mẫu nhận giá trị trong khoảng (a_i , b_i) thì ta xem chúng nhận giá trị chung là $x_i = \frac{a_i+b_i}{2}$

1.3. Các đặc trưng của mẫu

1.3.1. Đặc trưng của mẫu định tính

- Tần suất mẫu (hay là tỷ lệ mẫu): $\boxed{f = \frac{k}{n}}$

Ví dụ 1. Trước kỳ bầu cử, người ta phỏng vấn 1575 cử tri thì thấy có 1212 người trả lời là ủng hộ ứng cử viên X. Tìm tỷ lệ mẫu ủng hộ ứng cử viên X.

Ví dụ 2. Người ta bắt được 1200 con cá, đánh dấu rồi thả lại vào hồ nước. Sau một thời gian bắt lại 250 con thì thấy có 32 con bị đánh dấu. Hãy tìm tỷ lệ mẫu bị đánh dấu.

1.3.2. Các đặc trưng của mẫu định lượng

Cho mẫu định lượng dưới dạng thu gọn

X (x_i)	x_1	x_2	……	x_k
Tần số(n_i)	n_1	n_2	……	n_k

Ta có các đặc trưng mẫu như sau

- Trung bình mẫu $\boxed{\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}x_in_i}$.
- Phương sai mẫu

$$\boxed{\sigma_n^2=\overline{X^2}-(\overline{X})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_i^2n_i-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_in_i\right)^2}$$

- Độ lệch chuẩn mẫu $\boxed{\sigma_n=\sqrt{\sigma_n{}^2}}$
- Phương sai mẫu hiệu chỉnh $\boxed{S^2=\sigma_{n-1}^2=\frac{n}{n-1}\sigma_n^2}$
- Độ lệch chuẩn mẫu hiệu chỉnh $\boxed{S=\sigma_{n-1}=\sqrt{\sigma_{n-1}^2}}$

Ví dụ 3. Để nghiên cứu nhu cầu mua gạo ở một thành phố, người ta tiến hành điều tra một số gia đình và ghi kết quả ở bảng sau đây.

Nhu cầu (kg/tháng)	Số gia đình	Nhu cầu	Số gia đình
30 – 35	45	55 – 60	182
35 – 40	68	60 – 65	151
40 – 45	103	65 – 70	115
45 – 50	179	70 – 75	94
50 - 55	208	75 - 80	55

a) Hãy tính các đặc trưng mẫu.
b) Tính tỉ lệ mẫu có nhu cầu trên 60 kg/tháng.

2. LÝ THUYẾT ƯỚC LƯỢNG VÀ KIỂM ĐỊNH THỐNG KÊ

2.1. Lý thuyết ước lượng thống kê

2.1.1. Ta chỉ xét ước lượng khoảng hai phía đối xứng cho tỉ lệ và trung bình của tổng thể khi kích thước mẫu n≥30, phương sai tổng thể chưa biết.

ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG ĐỐI XỨNG
CHO TỈ LỆ HAY TRUNG BÌNH TỔNG THỂ

ƯỚC LƯỢNG TỶ LỆ		ƯỚC LƯỢNG GTTB (KỲ VỌNG)
	Nội dung bài toán	
Cần nghiên cứu tỷ lệ p của các phần tử có 1 tính chất xác định nào đó trên toàn bộ tổng thể. Căn cứ vào một mẫu định tính có kích thước n $(n \geq 30)$ hãy đưa ra một khoảng ước lượng $p \in (p_1, p_2)$ với độ tin cậy $1-\alpha$ đã ấn định trước.		Cần nghiên cứu giá trị trung bình (kỳ vọng) $a =$ E(X) của một ĐLNN X trên toàn bộ tổng thể. Căn cứ vào một mẫu định lượng kích thước n $(n \geq 30)$ hãy đưa ra một khoảng ước lượng $a \in (a_1, a_2)$ với độ tin cậy $1-\alpha$ đã ấn định trước.
	Thuật toán giải	
Tỷ lệ mẫu $\boxed{f = \frac{k}{n}(\%)}$ Trong đó, *k* là tần số mẫu.	**Bước 1:** Tính (các) đặc trưng mẫu	TB mẫu $\overline{X}$ Độ lệch chuẩn mẫu hiệu chỉnh S
	Bước 2: Tra bảng Laplace, tìm số $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ sao cho $\varphi\left(Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{1-\alpha}{2}$	
$\varepsilon = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$	**Bước 3:** Tính độ chính xác (sai số) ε	$\varepsilon = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$
$p \in (p_1, p_2)$ với độ tin cậy $1-\alpha$, ở đây $p_1 = f - \varepsilon, p_2 = f + \varepsilon$	**Bước 4:** Đưa ra khoảng ước lượng và kết luận bài toán.	$a \in (a_1, a_2)$ với độ tin cậy $1-\alpha$, ở đây $a_1 = \overline{X} - \varepsilon, a_2 = \overline{X} + \varepsilon$

Chú ý: Các dạng bài toán

- *Biết độ tin cậy 1 – α và độ chính xác ε, tìm kích thước mẫu tối thiểu.*
- *Biết độ chính xác ε và kích thước mẫu, tìm độ tin cậy 1 – α.*

2.1.2. Ví dụ 4: Kiểm tra ngẫu nhiên 500 sản phẩm của một nhà máy thì thấy có 360 sản phẩm loại một. Hãy ước lượng tỉ lệ sản phẩm loại một của cả nhà máy với độ tin cậy 95%.

2.1.3. Ví dụ 5: Tại một khu rừng nguyên sinh, người ta đeo vòng vào chân của 1200 con chim. Sau một thời gian bắt lại 250 con thì thấy 40 con có đeo vòng. Hãy ước lượng số chim trong khu rừng đó với độ tin cậy 99%.

2.1.4. Ví dụ 6: Điều tra về thu nhập của một số công nhân trong một xí nghiệp ta được bảng số liệu sau đây:

Thu nhập (triệu đồng/tháng)	Số công nhân
5	15
6	20
7	35
8	15
9	10
10	5

a) Hãy ước lượng thu nhập trung bình của công nhân toàn xí nghiệp với độ tin cậy 99%.

b) Những người có thu nhập trên 7 triệu đồng/tháng là người có thu nhập khá. Hãy ước lượng tỉ lệ công nhân có thu nhập khá trong xí nghiệp với độ tin cậy 95%. Nếu xí nghiệp có 1800 công nhân thì số công nhân có thu nhập khá tối thiểu của xí nghiệp là bao nhiêu?

2.2. Lý thuyết kiểm định thống kê

2.2.1. Ta sẽ xét kiểm định một tham số đối xứng hai phía hoặc một phía của (một) tổng thể và kiểm định so sánh hai tham số của hai tổng thể.

KIỂM ĐỊNH MỘT THAM SỐ HAI PHÍA CHO TỈ LỆ HAY TRUNG BÌNH TỔNG THỂ

KIỂM ĐỊNH TỶ LỆ **KIỂM ĐỊNH GTTB (KỲ VỌNG)**

Nội dung bài toán

KIỂM ĐỊNH TỶ LỆ	KIỂM ĐỊNH GTTB (KỲ VỌNG)
Bằng một cách nào đó, ta được biết rằng tỷ lệ p của các phần tử của toàn bộ tổng thể có một tính chất xác định nào đó là $p = p_0$. Hiện tại, ta nghi ngờ rằng p đã thay đổi. Đặt giả thuyết $H: p = p_0$, đối thuyết $\overline{H}: p \neq p_0$. Căn cứ vào một mẫu định tính kích thước n $(n \geq 30)$ hãy kiểm định để chấp nhận H hay bác bỏ H với mức ý nghĩa α đã ấn định trước.	Bằng một cách nào đó, ta đã biết rằng kỳ vọng của ĐLNN X trên toàn bộ là $a = a_0$. Hiện tại, ta nghi ngờ rằng a đã thay đổi. Đặt giả thuyết $H: a = a_0$, đối thuyết $\overline{H}: a \neq a_0$. Căn cứ vào một mẫu định lượng kích thước n $(n \geq 30)$ hãy kiểm định để chấp nhận H hay bác bỏ H với mức ý nghĩa α đã ấn định trước.

Thuật toán giải

Tỷ lệ mẫu f	**Bước 1** Tính (các) đặc trưng mẫu	- TB mẫu $\overline{X}$ - Độ lệch chuẩn mẫu hiệu chỉnh S = σ_{n-1}
	Bước 2: Tra bảng Laplace, tìm số $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ sao cho $\varphi\left(Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{1-\alpha}{2}$	
$Z_0 = \frac{(f - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}$	**Bước 3:** Tính giá trị tiêu chuẩn của kiểm định	$Z_0 = \frac{\left(\overline{X} - a_0\right)\sqrt{n}}{S}$
	Bước 4: So sánh và kết luận kiểm định với mức ý nghĩa α. - Nếu $\lvert Z_0 \rvert \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}$ thì chấp nhận H. - Nếu $\lvert Z_0 \rvert > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ thì bác bỏ H	

KIỂM ĐỊNH MỘT THAM SỐ MỘT PHÍA CHO TỈ LỆ HAY TRUNG BÌNH TỔNG THỂ

KIỂM ĐỊNH TỶ LỆ | KIỂM ĐỊNH GTTB (KỲ VỌNG)

Nội dung bài toán

KIỂM ĐỊNH TỶ LỆ	KIỂM ĐỊNH GTTB (KỲ VỌNG)
Bằng một cách nào đó, ta đã biết rằng tỷ lệ p các phần tử của toàn bộ tổng thể có một tính chất xác định nào đó là $p = p_0$. Hiện tại, ta nghi ngờ rằng p đã thay đổi. Đặt giả thuyết $H: p = p_0$, đối thuyết $\overline{H}: p > p_0$ (hay $\overline{H}: p < p_0$). Căn cứ vào một mẫu định tính kích thước n $(n \geq 30)$ hãy kiểm định để chấp nhận H hay bác bỏ H với mức ý nghĩa α đã ấn định trước.	Bằng một cách nào đó, ta đã biết rằng kỳ vọng của ĐLNN X trên toàn bộ tổng thể là $a = a_0$. Hiện tại, ta nghi ngờ rằng a đã thay đổi. Đặt giả thuyết $H: a = a_0$, đối thuyết $\overline{H}: a > a_0$ (hay $\overline{H}: a < a_0$). Căn cứ vào một mẫu định lượng kích thước n $(n \geq 30)$ hãy kiểm định để chấp nhận H hay bác bỏ H với mức ý nghĩa α đã ấn định trước.

Thuật toán giải

Kiểm định tỷ lệ	Bước	Kiểm định GTTB
Tỷ lệ mẫu f	**Bước 1** Tính (các) đặc trưng mẫu	-TB mẫu $\overline{X}$ -Độ lệch chuẩn mẫu hiệu chỉnh S = σ_{n-1}
	Bước 2: Tra bảng Laplace, tìm số Z_α sao cho $\varphi(Z_\alpha) = \frac{1}{2} - \alpha$	
$Z_0 = \frac{(f - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}$	**Bước 3:** Tính giá trị tiêu chuẩn của kiểm định	$Z_0 = \frac{(\overline{X} - a_0)\sqrt{n}}{S}$
	Bước 4: So sánh và kết luận kiểm định với mức ý nghĩa α. -Khi $\overline{H}$: ">", nếu $Z_0 > Z_\alpha$ thì bác bỏ H, ngược lại chấp nhận H. -Khi $\overline{H}$: "<", nếu $Z_0 < -Z_\alpha$ thì bác bỏ H, ngược lại chấp nhận H.	

KIỂM ĐỊNH SO SÁNH HAI THAM SỐ CHO TỈ LỆ HAY TRUNG BÌNH CỦA HAI TỔNG THỂ

SO SÁNH HAI TỶ LỆ **SO SÁNH HAI GTTB (KỲ VỌNG)**

Nội dung bài toán

SO SÁNH HAI TỶ LỆ		SO SÁNH HAI GTTB (KỲ VỌNG)
Xét sự giống nhau hay phân biệt giữa hai tỷ lệ p_1, p_2 các phần tử có một tính chất xác định nào đó tương ứng trên hai tổng thể. Đặt giả thuyết $H: p_1 = p_2$, đối thuyết $\overline{H}: p_1 \neq p_2$. Căn cứ vào hai mẫu định tính tương ứng của hai tổng thể kích thước $n_1, n_2 (n_1 \geq 30, n_2 \geq 30)$, hãy kiểm định để chấp nhận H hay bác bỏ H với mức ý nghĩa α đã ấn định trước.		Xét sự giống nhau hay phân biệt giữa kỳ vọng của hai ĐLNN X_1, X_2 tương ứng trên hai tổng thể. Đặt giả thuyết $H: a_1 = a_2$, đối thuyết $\overline{H}: a_1 \neq a_2$. Căn cứ vào hai mẫu định lượng tương ứng của hai tổng thể kích thước $n_1, n_2 (n_1 \geq 30, n_2 \geq 30)$, hãy kiểm định để chấp nhận H hay bác bỏ H với mức ý nghĩa α đã ấn định trước.
	Thuật toán giải	
Tỷ lệ mẫu f_1, f_2	**Bước 1:** Tính các đặc trưng mẫu	-TB mẫu $\overline{X_1}, \overline{X_2}$ - Phương sai mẫu hiệu chỉnh $S_1^2 = \sigma_{n-1,1}^2, S_2^2 = \sigma_{n-1,2}^2$.
	Bước 2: Tra bảng Laplace, tìm số $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ sao cho $\varphi\left(Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{1-\alpha}{2}$	
$Z_0 = \dfrac{f_1 - f_2}{\sqrt{p_o(1-p_o)\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$ Ở đây, $p_o = \dfrac{n_1 f_1 + n_2 f_2}{n_1 + n_2} = \dfrac{k_1 + k_2}{n_1 + n_2}$	**Bước 3:** Tính giá trị kiểm định tiêu chuẩn	$Z_0 = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$
	Bước 4: So sánh và kết luận kiểm định với mức ý nghĩa α. -Nếu $\lvert Z_0 \rvert \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}$ thì chấp nhận H. -Nếu $\lvert Z_0 \rvert > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ thì bác bỏ H.	

BÀI TẬP

1. Đo đường kính của một số chi tiết do một máy sản xuất, ta có bảng số liệu sau:

Đường kính (mm)	Số chi tiết
19,80 – 19,85	3
19,85 – 19,90	5
19,90 – 19,95	16
19,95 – 20,00	28
20,00 – 20,05	23
20,05 – 20,10	14
20,10 – 20,15	7
20,15 – 20,20	4

a) Hãy ước lượng đường kính trung bình của các chi tiết do máy đó sản xuất với độ tin cậy 95%.

b) Hãy ước lượng tỉ lệ chi tiết đạt tiêu chuẩn với độ tin cậy 99%, biết rằng những chi tiết đạt tiêu chuẩn phải có đường kính từ 19,9 mm đến 20,1 mm.

2. Muốn biết số cá có trong một hồ lớn, người ta bắt lên 2000 con, đánh dấu xong lại thả chúng xuống hồ . Sau đó người ta bắt lên 400 con thì thấy có 55 con bị đánh dấu. Với độ tin cậy 95% hãy ước lượng số cá trong hồ. Cho biết mỗi con cá có khối lượng trung bình 800 gam và mỗi kilôgam cá bán được 22000đ. Ước lượng doanh thu khi bán hết số cá trong hồ với độ tin cậy 95%.

3.Theo một số liệu điều tra vài năm trước, tỉ lệ người mắc bệnh tai mũi họng ở một thành phố là 6%. Hiện tại, do sự ô nhiễm ngày càng gia tăng, người ta dự đoán rằng tỉ lệ đó đã thay đổi. Kiểm tra sức khoẻ ngẫu nhiên 300 người thì thấy có 24 người mắc bệnh tai mũi họng. Với mức ý nghĩa $\alpha = 0,01$ có cơ sở để cho rằng tỉ lệ người mắc bệnh tai mũi họng có xu hướng tăng lên không?

4. Khi điều trị bằng thuốc A, tỉ lệ bệnh nhân khỏi bệnh là 80%. Đổi sang thuốc B để điều trị cho 1110 người thì thấy có 920 người khỏi bệnh. Với mức ý nghĩa $\alpha = 0,02$ có thể cho rằng thuốc B hiệu quả hơn thuốc A hay không ?

5. Một máy sản xuất tự động có tỉ lệ sản phẩm không đạt tiêu chuẩn là 24%. Sau khi áp dụng phương pháp sản xuất mới, người ta lấy 40 thùng hàng, mỗi thùng có 10 sản phẩm để kiểm tra. Kết quả cho trong bảng sau

Số sản phẩm không đạt tiêu chuẩn	0	1	2	3	4	5
Số thùng hàng	10	9	8	6	5	2

Với mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$; hãy đánh giá hiệu quả của phương pháp sản xuất mới này.

6. Theo dõi số tai nạn lao động của hai xí nghiệp trong một thời gian ta có số liệu sau. Xí nghiệp thứ nhất : 20 tai nạn/400 công nhân. Xí nghiệp thứ hai : 28 tai nạn/500 công nhân. Hỏi có sự khác nhau đáng kể về chất lượng công tác phòng hộ lao động ở hai xí nghiệp đó với mức ý nghĩa $\alpha = 2\%$?

7. Theo phương pháp nuôi thứ nhất, tỉ lệ gà bị bệnh trong đàn gà là 0,06. Theo phương pháp nuôi thứ hai, kiểm tra thấy có 5 con bị bệnh trong đàn gà 100 con.

Với mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$ có thể kết luận rằng tỉ lệ gà bị bệnh khi nuôi theo phương pháp thứ hai thấp hơn không?

8. Khối lượng của một loại sản phẩm do một nhà máy sản xuất là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với khối lượng trung bình quy định là 500 gam. Nghi ngờ khối lượng của loại sản phẩm này có xu hướng giảm sút, người ta đã cân thử một số sản phẩm và thu được kết quả ghi ở bảng sau.

Khối lượng (g)	480	485	490	495	500	505	510
Số sản phẩm	2	3	8	5	3	10	4

Với mức ý nghĩa $\alpha = 2\%$, hãy kết luận về điều nghi ngờ đó.

9. Kiểm tra các sản phẩm do hai phân xưởng sản xuất, ta có các số liệu sau đây.

Phân xưởng	Số sản phẩm được kiểm tra	Khối lượng trung bình (kg)	Phương sai mẫu hiệu chỉnh	Số phế phẩm
1	900	50,2	0,16	18
2	800	50,1	0,20	15

a) Với mức ý nghĩa 0,05 có thể coi khối lượng trung bình của các sản phẩm do hai phân xưởng sản xuất là như nhau được không ?

b) Với mức ý nghĩa 0,01 có thể coi tỉ lệ phế phẩm của hai phân xưởng cũng như nhau hay không ?

10. Kiểm tra 100 sản phẩm do máy thứ nhất sản xuất ta thấy khối lượng trung bình là 251g, phương sai mẫu hiệu chỉnh là $9(g^2)$. Kiểm tra 100 sản phẩm do máy thứ hai sản xuất ta được kết quả tương ứng là 249g, $16(g^2)$.Với mức ý nghĩa 0,02 có thể kết luận khối lượng trung bình của sản phẩm do hai máy sản xuất là khác nhau hay không?

PHẦN 3

PHẦN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

0. Nhắc lại vài kiến thức đại số liên quan

0.1. Ma trận và các phép biến đổi sơ cấp

0.2. Ma trận đơn vị và ma trận sơ cấp

0.3. Định thức cấp 2, 3

0.4. Hạng của ma trận

0.5. Nhận biết tính độc lập tuyến tính

1. Bài toán QHTT và bài toán đối ngẫu

1.1. *Lập bài toán QHTT từ vấn đề thực tiễn* *(SƠ LƯỢC!)*

1.1.1. Ví dụ 1: Bài toán lập kế hoạch sản xuất

Vấn đề thực tiễn

Một xí nghiệp dùng ba loại vật liệu (VL) V_1, V_2, V_3 để sản xuất hai loại sản phẩm (SP) S_1 và S_2. Để làm được 1 đơn vị S_1 cần 4 đơn vị vật liệu V_1, 5 đơn vị vật liệu V_2, 3 đơn vị vật liệu V_3. Để làm được 1 đơn vị S_2 cần 3 đơn vị V_1, 2 đơn vị V_2, 7 đơn vị V_3. Giá bán một đơn vị S_1 là 50 ngàn đồng, một đơn vị S_2 là 30 ngàn đồng.

Hỏi xí nghiệp nên sản xuất bao nhiêu đơn vị sản phẩm S_1 và S_2 để tổng thu nhập là lớn nhất, biết rằng xí nghiệp chỉ có 1200 đơn vị vật liệu V_1, 2000 đơn vị vật liệu V_2 và 1080 đơn vị vật liệu V_3?

Vật liệu \ Sản phẩm	S_1	S_2	Trữ lượng VL
V_1	4	3	1200
V_2	5	2	2000
V_3	3	7	1080
Giá bán 1 đơn vị SP	50	30	

Thiết lập mô hình toán học

Gọi x_1, x_2 lần lượt là số đơn vị sản phẩm S_1, S_2 cần sản xuất để thỏa mãn yêu cầu. Khi đó

- Số đơn vị vật liệu V_1 cần có là $4x_1 + 3x_2$.
  Do xí nghiệp chỉ có 1200 đơn vị vật liệu V_1 nên x_1 và x_2 phải thỏa mãn điều kiện
  $$4x_1 + 3x_2 \le 1200.$$
- Số đơn vị vật liệu V_2 cần có là $5x_1 + 2x_2$.
  Tương tự như trên, x_1 và x_2 phải thoả mãn điều kiện
  $$5x_1 + 2x_2 \le 2000.$$
- Số đơn vị vật liệu V_3 cần có là $3x_1 + 7x_2$.
  Tương tự như trên, x_1 và x_2 phải thoả mãn điều kiện
  $$3x_1 + 7x_2 \le 1080.$$

Tất nhiên ta còn phải có $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Tổng thu nhập của xí nghiệp là $f = 50x_1 + 30x_2$ (ngàn đồng). Ta cần tìm x_1, x_2 làm cho f đạt cực đại.

Như vậy, vấn đề thực tiễn đặt ra trong xí nghiệp được phát biểu thành bài toán thuần túy toán học như sau:

Tìm các biến (ẩn số) x_1, x_2 sao cho

$$f = 50x_1 + 30x_2 \rightarrow \max,$$

với các điều kiện

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 1200 & (1) \\ 5x_1 + 2x_2 \le 2000 & (2) \\ 3x_1 + 7x_2 \le 1080 & (3) \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 & (4) \end{cases}$$

- Ta gọi bài toán này là bài toán quy hoạch tuyến tính (QHTT) tương ứng với vấn đề thực tiễn nêu trên.
- Hàm f gọi là hàm mục tiêu của bài toán; x_1, x_2 gọi là các biến hay các ẩn - Ta cần tìm các ẩn x_1, x_2 làm cho f cực đại max.
- Các điều kiện (1), (2), (3), (4) gọi là hệ ràng buộc của bài toán. Trong đó (1), (2), (3) gọi là các ràng buộc chính (đó là một hệ các bất phương trình hoặc phương trình) ; còn (4) gọi là các ràng buộc dấu.

1.1.2. <u>Ví dụ 2</u>: Bài toán xác định khẩu phần thức ăn

Vấn đề thực tiễn

Một nông trại chăn nuôi cần mua ba loại thức ăn tổng hợp (TH) T_1, T_2, T_3 cho gia súc với tỉ lệ chế biến :

- 1 kg T_1 chứa 2 đơn vị dinh dưỡng (DD) D_1 (Hyđrat cacbon), 5 đơn vị dinh dưỡng D_2 (chất béo) và 3 đơn vị dinh dưỡng D_3 (Protein);
- 1 kg T_2 chứa 1 đơn vị D_1, 4 đơn vị D_2 và 2 đơn vị D_3.
- 1 kg T_3 chứa 3 đơn vị D_1, 2 đơn vị D_2 và 5 đơn vị D_3.
- Mỗi bữa ăn cho gia súc cần ***tối thiểu*** 60 đơn vị D_1, ***tối thiểu*** 20 đơn vị D_2, ***tối đa*** 40 đơn vị D_2 và cần ***đúng*** 50 đơn vị D_3.

Hỏi nông trại cần mua bao nhiêu kg T_1, T_2, T_3 cho mỗi bữa ăn, sao cho vừa đảm bảo tốt dinh dưỡng cho bữa ăn của gia súc, vừa để tổng số tiền chi mua thức ăn là nhỏ nhất biết rằng mua 1 kg T_1 giá 50 ngàn đồng, 1 kg T_2 giá 35 ngàn đồng, 1 kg T_3 giá 25 ngàn đồng.

Các chất DD	Các loại thức ăn TH			Định mức
	T_1	T_2	T_3	
D_1	2	1	3	≥ 60
D_2	5	4	2	$\geq 20; \leq 40$
D_3	3	2	5	$= 50$
Giá mua 1 kg thức ăn	50	35	25	

Thiết lập mô hình toán học

Gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là số kg thức ăn T_1, T_2, T_3 cần mua cho mỗi bữa ăn.

- Số đơn vị D_1 có trong mỗi bữa ăn là $2x_1 + x_2 + 3x_3$. Rõ ràng x_1, x_2 và x_3 cần thỏa mãn điều kiện
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 60.$$
- Số đơn vị D_2 có trong mõi bữa ăn là $5x_1 + 4x_2 + 2x_3$. Tương tự x_1, x2 và x_3 cần thỏa mãn điều kiện
$$20 \leq 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 40.$$
- Số đơn vị D_3 có trong mõi bữa ăn là $3x_1 + 2x_2 + 5x_3$. Tương tự x_1, x_2 và x_3 cần thỏa mãn điều kiện
$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 50.$$
- Tất nhiên, ta cũng đòi hỏi
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \text{ và } x_3 \geq 0.$$
- Số tiền chi mua thức ăn là $f = 50x_1 + 35x_2 + 25x_3$ (ngàn đồng). Ta cần tìm x_1, x_2, x_3 làm cho f cực tiểu.

Như vậy, vấn đề thực tiễn đặt ra trong nông trại được phát biểu thành bài toán thuần túy toán học như sau:

Tìm các biến số x_1, x_2 và x_3 sao cho

$$f = 50x_1 + 35x_2 + 25x_3 \to \min,$$

thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 60; \\ 20 \le 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 40; \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 50; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Đây là một bài toán QHTT với 3 ẩn x_1, x_2, x_3 và hàm mục tiêu đạt **min**.

- Mỗi vectơ $x = (x_1, x_2, x_3)$ thỏa mãn hệ ràng buộc gọi là một *phương án* (PA) của bài toán QHTT đã cho. PA $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ gọi là *nghiệm* hay *phương án tối ưu* (PATU) của bài toán QHTT đã cho nếu nó làm cho hàm mục tiêu đạt **min** (hoặc đạt **max** nếu bài toán có hàm mục tiêu đạt max).
- Giải một bài toán QHTT là việc đi *tìm một nghiệm* (hay PATU) của bài toán đó.

1.2. Các dạng bài toán QHTT

1.2.1. Bài toán QHTT dạng tổng quát (G)

Đó là bài toán QHTT mà hệ rằng buộc chính có thể gồm các bất phương trình (BPT) hay phương trình (PT), các ẩn (biến) có thể chịu ràng buộc dấu không âm (≥ 0), không dương (≤ 0) hoặc dấu bất kỳ.

Như vậy, bài toán QHTT tổng quát (G) có dạng dưới đây.

Tìm các biến số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sao cho

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \text{ (hay max)} \tag{2.1}$$

thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = 1, \ldots, m_1, & (2.2) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i,\ i = m_1 + 1, \ldots, m_1 + m_2, & (2.3) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = m_1 + m_2 + 1, \ldots, m, & (2.4) \\ x_j \ge 0,\ j = 1, \ldots, n_1,\ x_j \le 0,\ j = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2 \le n, & (2.5) \end{cases}$$

Trong bài toán trên, f gọi là *hàm mục tiêu*, mỗi hệ thức ở (2.2) - (2.5) gọi là một *ràng buộc*. Mỗi ràng buộc (2.2) - (2.4) gọi là một *ràng buộc chính* (dạng *đẳng thức* hay *bất đẳng thức*), mỗi ràng buộc $x_j \ge 0$ hay $x_j \le 0$ gọi là một *ràng buộc về dấu*.

Điểm (vectơ) $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$ thỏa mãn mọi ràng buộc gọi là một *phương án* (PA). Tập hợp tất cả các PA, ký hiệu là D, gọi là *miền ràng buộc*. Một PA thoả mãn (2.1), tức là làm cho hàm mục tiêu đạt min (hoặc max) gọi là một *phương án tối ưu* (PATU) hay một *lời giải* của bài toán đã cho. Bài toán có ít nhất một PATU gọi là bài toán *có lời giải* hay *có nghiệm*. Bài toán không có PA (miền ràng buộc rỗng $D = \emptyset$) hoặc có PA nhưng không có PATU, do hàm mục tiêu không bị chặn, tức là giảm vô hạn (đối với bài toán tìm min) hoặc tăng vô hạn (đối với bài toán tìm max), gọi là bài toán *không có lời giải* hay *vô nghiệm*. Giải bài toán QHTT tức là đi *tìm dù chỉ một nghiệm của nó hoặc chỉ ra nó vô nghiệm*.

Hai ví dụ 1, ví dụ 2 nêu trên đều là các bài toán QHTT dạng tổng quát.

1.2.2. Bài toán QHTT dạng chính tắc (C)

Đó là bài toán QHTT mà hệ ràng buộc chính đều là các PT – nói cách khác, hệ ràng buộc chính là một hệ PT tuyến tính. Hơn nữa, mọi biến đều không âm – tức là mọi ràng buộc dấu có dạng $x_j \geq 0$.

Như vậy, bài toán QHTT chính tắc (C) có dạng dưới đây.

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \text{ (hay max)},$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ i = 1, 2, ..., m, \\ x_j \geq 0, \ j = 1, 2, ..., n, \end{cases}$$

1.2.3. Bài toán QHTT dạng chính tắc chuẩn (N)

Đó là bài toán QHTT dạng chính tắc đặc biệt trong đó hệ PT ràng buộc chính gồm m PT, n ẩn số với $m \leq n$, mỗi PT đều có vế phải không âm, đồng thời ma trận hệ số một ma trận con đơn vị hoặc chứa một ma trận con sơ cấp đơn giản (tức là ma trân nhận được từ ma trận đơn vị bằng cách đổi chỗ các dòng) cấp m.

Như vậy, bài toán QHTT chính tắc chuẩn (N) có dạng dưới đây.

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \text{ (hay max)},$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ i = 1, 2, ..., m, \\ x_j \geq 0, \ j = 1, 2, ..., n, \end{cases}$$

ở đây $b_i \geq 0$; $i = 1, 2, \ldots, m$; $m \leq n$ và ma trận hệ số $A = (a_{ij})_{m \times n}$ là ma trận hạng m và chứa một ma trận con (vuông cấp m) đơn vị hay sơ cấp.

1.2.4. Chú ý

1. Mỗi bài toán QHTT dạng tổng quát (G) đều có thể dễ dàng biến đổi về dạng chính tắc (C), sau đó biến đổi về dạng chính tắc chuẩn (N) bằng các phép biến đổi dưới đây.

+ Mỗi ràng buộc bất đẳng thức

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad \text{hoặc} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i,$$

đều có thể đưa về ràng buộc đẳng thức nhờ thêm vào một biến mới, gọi là <u>*biến phụ*</u>, $x_{n+i} \ge 0$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \quad \text{hoặc} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i.$$

+ Nếu biến x_j không bị ràng buộc về dấu thì ta có thể thay nó bởi hiệu của hai biến không âm bằng cách đặt $x_j = x_j^+ - x_j^-$ với $x_j^+ \ge 0,\ x_j^- \ge 0,$ Còn nếu $x_j \le 0$ thì bằng cách đặt biến mới $y_j = -x_j$ ta sẽ có $y_j \ge 0$.

+ Một ràng buộc $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ với $b_i < 0$ có thể viết thành $\sum_{j=1}^{n} (-a_{ij})x_j = -b_i$ để luôn có vế phải không âm.

+ Nếu ma trận hệ số A của hệ ràng buộc chính chưa chứa ma trận con đơn vị hay sơ cấp thì ta thêm vào đúng m biến <u>*giả*</u> $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ lần lượt vào từng ràng buộc chính với hệ số 1 và trong cả hàm mục tiêu với hệ số giả $M > 0$ (M đủ lớn – tức là lớn hơn tất cả những số dương mà ta cần so sánh).

+ Ngoài ra, mỗi bài toán $f \to \max$ có thể đưa về bài toán $g = -f \to \min$ khi đổi dấu hàm mục tiêu và giữ nguyên các ràng buộc.

2. Chú ý

Bài toán (G) ban đầu và bài toán (C) hay (N) có quan hệ như tương hỗ như sau :

+ Từ PATU của bài toán (C), chỉ cần loại bỏ các biến phụ (nếu có) ta sẽ nhận được PATU của bài toán (G) ban đầu.

+ Còn bài toán (C) và bài toán (N) tương đương theo nghĩa sau đây

- Nếu bài toán (N) có PATU mà trong đó mọi biến giả đều triệt tiêu thì chỏ cần loại đi tất cả các biến giả ta được PATU của (C).
- Nếu bài toán (N) có PATU mà trong đó có ít nhất một biến giả dương thì bài toán (C) không có PA (miền ràng buộc D rỗng) và đương nhiên vô nghiệm.
- Bài toán (N) vô nghiệm thì (C) cũng vô nghiệm.

1.2.5. Các ví dụ

Ví dụ 3

- Dưới đây là bài toán QHTT dạng chính tắc (C) mà hàm mục tiêu đạt **max**:

$$f = x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 3; \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 8; \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -4; \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3,4. \end{cases}$$

-Ta đưa về bài toán **min** như sau:

$$g = -f = -x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 3; \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 8; \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -4; \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3,4. \end{cases}$$

- Dưới đây là bài toán QHTT dạng chính tắc chuẩn (N):

$$f = x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 - x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} x_2 + 3x_4 + x_5 = 5; \\ x_1 + 3x_2 + 6x_4 = 9; \\ 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 4; \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5. \end{cases}$$

Ví dụ 4: Hãy đưa bài toán QHTT ở ví dụ 1 về dạng (C) rồi dạng (N).

Ví dụ 5 : Hãy đưa bài toán QHTT ở ví dụ 2 về dạng (C) rồi dạng (N).

1.3. Phương án cực biên

1.3.1. Phương án cực biên đối với bài toán QHTT dạng tổng quát

Xét một bài toán QHTT dạng tổng quát (G) có **n** biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Một PA $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ của bài toán (G) đang xét được gọi là *phương án cực biên (PACB)* nếu nó thỏa mãn dấu "=" (còn gọi là thỏa mãn *chặt*) với ít nhất **n** ràng buộc trong đó có đúng **n** ràng buộc độc lập tuyến tính (tức là ma trận hệ số của n ràng buộc đó có hạng bằng **n**) trong hệ rằng buộc của (G).

1.3.2. Phương án cực biên đối với bài toán QHTT dạng chính tắc

1. Xét một bài toán QHTT dạng chính tắc (C) có n biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Một PA $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ của bài toán (C) đang xét là *phương án cực biên* (PACB) nếu hệ các cột của ma trận hệ số ứng với các $x_j^* > 0$ lập thành hệ độc lập tuyến tính. Khi xét một PACB bất kỳ, mỗi biến dương gọi là *biến cơ sở*, các hệ số trong hàm mục tiêu ứng với nó gọi là *hệ số cơ sở* ; các biến và các hệ số còn lại gọi là các *biến* và các *hệ số phi cơ sở*.

2. Giả sử bài toán QHTT (C) có m ràng buộc chính, tức là ma trận hệ số A có m dòng (và tất nhiên n cột). Lúc đó chỉ có tối đa m cột độc lập. Bởi thế mỗi PACB của (C) có tối đa m biến cơ sở, các biến phi cơ sở đều triệt tiêu. Một PACB gọi là *không suy biến* nếu nó có đúng m biến cơ sở, tức là đúng n – m biến triệt tiêu. Trái lại, nếu biến cơ sở nhỏ hơn m thì PACB được gọi là *suy biến*.

1.3.3. Nhận xét quan trọng

1. Mỗi bài toán QHTT dạng chính tắc hoặc không có hoặc chỉ có một số hữu hạn PACB.

2. Nếu bài toán QHTT dạng chính tắc có PA thì chắc chắn có PACB.

3. Nếu bài toán QHTT có PATU và có PACB thì chắc chắn có PACBTU.

4. Bài toán QHTT dạng chính tắc có PATU thì PACBTU.

1.3.4. Các ví dụ

Ví dụ 6: Cho bài toán QHTT

$$f(x) = 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 - x_3 \ge 0; \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 \ \ge 1; \\ -x_1 \qquad -2x_3 \le -2; \\ \qquad -3x_2 + x_3 \le 2; \\ x_1 - x_2 \qquad\quad \ge -2. \end{cases}$$

Xét xem vectơ x* = (2, 1, 0) có là PA, PACB không?

Đáp: x* là PACB.

Ví dụ 7: Xét xem vectơ **x* =** (1, 2, 0,0,0) là PA, PACB của bài toán QHTT sau đây không ?

$$f(x) = x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad + x_5 = 4; \\ 4x_1 - 5x_2 \qquad + 3x_4 - x_5 = -6; \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \quad - x_4 \qquad = 3; \\ x_j \ge 0; \quad j = 1,2,3,4,5. \end{cases}$$

Đáp: x* là PACB.

Ví dụ 8: Cho bài toán QHTT dạng chính tắc với các điều kiện sau:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 6, \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3, 4). \end{cases} \quad (3.2)$$

Xét xem véctơ x = (1, 0, 1, 3) có phải là phương án cực biên của bài toán hay không?

Giải: Kiểm tra trực tiếp ta thấy véctơ x thỏa mãn (3.2). Vậy x là một phương án của bài toán. Mặt khác, x có $x_1 = 1 > 0$, $x_3 = 1 > 0$, $x_4 = 3 > 0$ ứng với hệ 3 véctơ cột

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

độc lập tuyến tính (vì định thức $|A_1, A_3, A_4| = 5 \neq 0$) nên x là một PACB, hơn nữa x không suy biến.

1.4. Cặp bài toán đối ngẫu và ứng dụng

1.4.1. Cách lập bài toán đối ngẫu của bài toán QHTT đã cho

Bài toán gốc (P) **Hay bài toán đối ngẫu (P*)**	**Bài toán đối ngẫu (P*)** **Hay bài toán gốc (P)**
Các biến gốc $x_1, x_2, ..., x_n$	Các biến đối ngẫu $y_1, y_2, ..., y_m$
Hàm mục tiêu $f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min.$	Hàm mục tiêu $g(Y) = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \to \max.$
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \begin{matrix} \geq b_i \\ = b_i \\ \leq b_i \end{matrix} \ (i = 1, ..., m)$	$y_i \begin{matrix} \geq 0 \\ \text{tùy ý} \\ \leq 0 \end{matrix} \ (i = 1, ..., m)$
$x_j \begin{matrix} \geq 0 \\ \text{tùy ý} \\ \leq 0 \end{matrix} \ (j = 1, ..., n)$	$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + ... + a_{mj}y_m \begin{matrix} \leq c_j \\ = c_j \\ \geq c_j \end{matrix} \ (j = 1, ..., n)$

1.4.2. Chú ý

a. Từ BT gốc **min** lấy đối ngẫu thành **max**. Các ràng buộc chính sẽ có đối ngẫu là các ràng buộc dấu **cùng chiều** tạo thành cặp ràng buộc đối ngẫu. Các ràng buộc dấu sẽ có đối ngẫu là ràng buộc chính **trái chiều** tạo thành cặp ràng buộc đối ngẫu.

b. Từ BT gốc **max** thì BT đối ngẫu là **min**. Các ràng buộc chính sẽ có đối ngẫu là các ràng buộc dấu **trái chiều** và tạo thành cặp ràng buộc đối ngẫu. Các ràng buộc dấu sẽ có đối ngẫu là ràng buộc chính **cùng chiều** và tạo thành cặp ràng buộc đối ngẫu.

1.4.3. Định lý cân bằng

Nếu tìm được PA $x^* = (x_1, \ldots, x_n)$ và $y^* = (y_1, \ldots, y_m)$ tương ứng của (P) và (P*) sao cho $f(x^*) = g(y^*)$ thì x* là nghiệm của (P) và y* là nghiệm của (P*).

1.4.4. Định lý độ lệch bù

Xét cặp bài toán đối ngẫu (P), (P*). Giả sử x*, y* tương ứng là PA của (P), (P*). Để x*, y* là PATU tương ứng của (P), (P*) cần và đủ là khi thay x*, y* vào mỗi cặp ràng buộc đối ngẫu, ít nhất một trong hai ràng buộc phải được thỏa mãn với dấu "=".

1.5. Các tính chất tổng quát của bài toán QHTT

1.5.1. Một bài toán QHTT có thể không có PA, lúc đó nó vô nghiệm.

1.5.2. Điều kiện cần và đủ để một bài toán QHTT có PATU là nó có PA và hàm mục tiêu bị chặn.

1.5.3. Nếu bài toán QHTT có PATU và có PACB thì chắc chắn có PACBTU.

1.5.4. Xét cặp bài toán QHTT đối ngẫu (P) và (P*). Khi đó ta luôn có:

a. Nếu cả hai bài toán đều có PA thì chắc chắn cả hai đều có PATU.

b. Nếu một trong hai bài toán có PA và hàm mục tiêu không bị chặn (lúc đó đương nhiên bài toán này vô nghiệm) thì bài toán kia không có PA và do đó cũng vô nghiệm.

c. Nếu một trong hai bài toán không có PA (và đương nhiên vô nghiệm) thì bài toán kia hoặc không có PA hoặc có PA và hàm mục tiêu không bị chặn, do đó đương nhiên cũng vô nghiệm.

d. Nếu một trong hai bài toán có PATU thì bài toán kia cũng có PATU và giá trị tối ưu của hai bài toán bằng nhau (tức là cân bằng).

2. Phương pháp đơn hình

2.1. Các bước giải bài toán QHTT bằng phương pháp đơn hình

Để giải bài toán QHTT dạng chính tắc chuẩn bằng phương pháp đơn hình ta thực hiện các bước dưới đây.

- **Bước 1:** Xác định P.A.C.B X_o xuất phát, chỉ ra các biến và các hệ số cơ sở.
- **Bước 2:** Lập bảng đơn hình, tính giá trị hàm mục tiêu và các số ước lượng Δ_j.

Biến cơ sở	Hệ số cơ sở	PA CB	x_1	x_2	……	x_m	x_{m+1}	……	x_n	λ_i
			c_1	c_2	……	c_m	c_{m+1}	……	c_n	
x_1	c_1	b_1	1	0	……	0	$a_{1,m+1}$	……	a_{1n}	
x_2	c_2	b_2	0	1	……	0	$a_{2,m+1}$	……	a_{2n}	
.	.	.	.	.	……	.	.	……	.	
.	.	.	.	.	……	.	.	……	.	
.	.	.	.	.	……	.	.	……	.	
x_m	c_m	b_m	0	0	……	1	$a_{m,m+1}$	……	a_{mn}	
Bảng 1		$f(x^0)$	0	0	……	0	Δ_{m+1}	……	Δ_n	

Ở đây $f(x^0) = c_1b_1 + c_2b_2 + \ldots + c_mb_m$;

$$\Delta_j = 0 \ (j=1,\ldots,m); \quad \Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j;\ m+1 \le j \le n.$$

- **Bước 3:** Kiểm tra điều kiện tối ưu.

<u>Đối với bài toán MIN</u>

a) Nếu mọi $\Delta_j \le 0$ phương án đang xét tối ưu $\to$ STOP và kết luận về đáp số của bài toán.

b) Nếu tồn tại $\Delta_j > 0$ mà mọi $a_{ij} \le 0$ thì bài toán đã cho vô nghiệm $\to$ STOP và kết luận bài toán không có lời giải.

c) Nếu tồn tại $\Delta_j > 0$ mà với mỗi $\Delta_j > 0$ đều có ít nhất một $a_{ij} > 0$ thì phương án đang xét chưa tối ưu $\to$ Làm tiếp bước 4.

- **Bước 4:** Cải tiến P.A.C.B đang xét để được P.A.C.B tốt hơn.

<u>Đối với bài toán MIN</u>

a) Chọn biến cơ bản mới x_v sao cho $\Delta_v = \max\{\Delta_j > 0\}$ để đưa vào.

b) Chọn biến cơ bản cũ x_r sao cho $\lambda_r = \min\{\lambda_i = \dfrac{b_i}{a_{iv}} / a_{iv} > 0\}$ để đưa ra.

Tiếp theo chọn dòng thứ *r* làm dòng trục (xoay), phần tử a_{rv} làm phần tử trụ (xoay) rồi biến đổi sơ cấp để được bảng đơn hình mới. Sau đó lặp lại các bước 2, 3, 4 cho đến khi được P.A.C.B tối ưu thì dừng và kết luận về đáp số của bài toán đã cho.

<u>Chú ý</u>

- Có thể quy bài toán $f \to \text{MAX}$ về bài toán $-f \to \text{MIN}$.

- **Dấu hiệu bài toán vô số nghiệm**: Khi kiểm tra điều kiện tối ưu ở bước 3, nếu mọi $\Delta_j \le 0$ (đối với bài toán MIN) đồng thời tồn tại một $\Delta_j = 0$ ứng với biến phi cơ sở x_j thì bài toán có vô số nghiệm.

CÁCH BIẾN ĐỔI BẢNG ĐƠN HÌNH

Biến cơ bản (cơ sở)	Hệ số cơ bản (cơ sở)	**P.A. C.B**	**… … … … … …**
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	c_i	b_i	… … … … … … a_{iv} … … … … … …
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_r	c_r	b_r	… … … … … … $\boxed{a_{rv}}$ … … … … … …
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Khi chọn dòng r là dòng trục (xoay) , phần tử a_{rv} làm phần tử trụ (xoay) thì ta cần biến đổi bảng đơn hình như sau:

- Thay hệ số cơ sở c_r bởi c_v; thay biến số cơ sở x_r bởi x_v.
- Chia toàn bộ dòng xoay (trục) cho phần tử trụ xoay a_{rv}:

$$\boxed{(\text{dòng } r \text{ mới}) = \frac{1}{a_{rv}}.(\text{dòng } r \text{ cũ})}.$$

- Biến đổi các dòng i kể từ cột P.A.C.B sang phải (tức là trừ các cột chứa c_i, x_i không biến đổi gì thêm nữa) theo cách:

$$\boxed{(\text{dòng } i \text{ mới}) = (\text{dòng } i \text{ cũ}) - a_{iv}(\text{dòng } r \text{ mới})}.$$

CÁC VÍ DỤ GIẢI SẴN

Ví dụ 1. Tìm các phương án cực biên không suy biến của bài toán qui hoạch tuyến tính với các ràng buộc sau:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ x_j \geq 0, \ j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Giải. Bài toán này có m = 2 ràng buộc chính và n = 3 biến. Một PACB không suy biến phải có đúng m = 2 thành phần dương, tức là có đúng n – m = 1 thành phần bằng 0. Vì thế, lần lượt cho x_1, x_2, $x_3 = 0$ ta được:

+ Với $x_1 = 0$, hệ phương trình trên cho ta $x_2 = 9/2$; $x_3 = 5$

+ Với $x_2 = 0$, hệ phương trình trên vô nghiệm.

+ Với $x_3 = 0$, hệ phương trình trên cho ta $x_1 = 5$; $x_2 = 9/2$.

Như vậy, ta nhận được hai phương án của bài toán: $(0, \frac{9}{2}, 5)$ và $(5, \frac{9}{2}, 0)$. Kiểm tra trực tiếp cho thấy hệ $\{A_2 = (-2, 2)^T, A_3 = (3, -1)^T\}$ và $\{A_1 = (3, -1)^T, A_2 = (-2, 2)^T\}$ là độc lập tuyến tính, nên cả hai phương án trên đều là các PACB không suy biến (số thành phần dương bằng m = 2).

Ví dụ 2. Tìm các phương án cực biên không suy biến của bài toán qui hoạch tuyến tính với các ràng buộc sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, \ j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Giải. Bài toán này có m = 2 ràng buộc chính và n = 4 biến. Một phương án cực biên không suy biến phải có đúng m = 2 thành phần dương, tức là có đúng n – m = 2 thành phần bằng 0. Vì thế, lần lượt cho mỗi cặp biến x_1, x_2, x_3, $x_4 = 0$ ta được:

+ Với $x_1 = x_2 = 0$, hệ phương trình trên cho ta $x_3 = 8$; $x_4 = 2$.

+ Với $x_1 = x_3 = 0$, hệ phương trình trên cho ta $x_2 = 16/3$; $x_4 = 14/3$.

+ Với $x_1 = x_4 = 0$, hệ phương trình trên vô nghiêm (không có nghiệm không âm).

+ Với $x_2 = x_3 = 0$, hệ phương trình trên vô nghiêm (không có nghiệm không âm).

+ Với $x_2 = x_4 = 0$, hệ phương trình trên cho ta $x_1 = 4$; $x_3 = 6$.

+ Với $x_3 = x_4 = 0$, hệ phương trình trên cho ta $x_1 = 7$; $x_2 = 3$.

Như vậy ta nhận được các phương án sau đây:

$x^1 = (0, 0, 8, 2)$; $x^2 = (0, \frac{16}{3}, 0, \frac{14}{3})$; $x^3 = (4, 0, 6, 0)$; $x^4 = (7, 3, 0, 0)$.

Kiểm tra trực tiếp cho thấy cả 4 phương án trên đều là các PACB không suy biến (số thành phần dương bằng m = 2).

Ví dụ 3 Cho bài toán QHTT (G)

$$f = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \le 5; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 3; \\ x_j \ge 0, j = 1,2,3,4. \end{cases}$$

a) Lập bài toán đối ngẫu (G*) của (G).

b) CMR x* = (0, 1, 1, 0) là PA, PACB, PATU của bài toán (G). Từ đó suy ra (G*) có PATU duy nhất.

c) Tìm tập hợp các PATU của (G) thỏa mãn điều kiện $x_3 + 5x_4 = 1$.

<u>Bài giải</u>

a) Bài toán đối ngẫu (G*) là

$$g = 5y_1 + 3y_2 \to \min$$
$$\begin{cases} y_1 + y_2 \ge 2; \\ 2y_1 + y_2 \ge 3; \\ 3y_1 + 2y_2 \ge 5; \\ y_1 + 3y_2 \ge 4; \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0. \end{cases}$$

b) Trước hết, thay x* = (0, 1, 1, 0) (tức là cho $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$) vào hệ ràng buộc của (G) ta thấy thỏa mãn. Do đó x* là một PA của (G).

Để ý tiếp rằng (G) có n = 4 ẩn, trong hệ 6 ràng buộc (2 ràng buộc chính và 4 ràng buộc dấu) x* thỏa mãn dấu "=" ở đúng 4 ràng buộc sau:

$$\begin{cases} x_1 \ge 0; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \le 5; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 3; \\ x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Lập ma trân hệ số và BĐSC ta được:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&2&3&1\\1&1&2&3\\0&0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&2&3\\0&0&-1&-5\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$ (bậc thang 4 dòng khác không).

Suy ra Hạng(A) = 4 và 4 ràng buộc thỏa mãn dấu "=" nêu trên độc lập tuyến tính. Vậy x* là PACB.

Bây giờ để CM x* = (0, 1, 1, 0) là PATU, ta dùng định lý đọ lệch bù cho các cặp ràng buộc đối ngẫu. Chú ý ta có 6 cặp ràng buộc đối ngẫu sau đây:

(G)		(G*)	
$x_1+2x_2+3x_3+x_4\le 5$	(1)	$y_1\ge 0$	(1*)
$x_1+x_2+2x_3+3x_4\le 3$	(2)	$y_2\ge 0$	(2*)
$x_1\ge 0$	(3)	$y_1 + y_2 \ge 2$	(3*)
$x_2\ge 0$	(4)	$2y_1+y_2 \ge 3$	(4*)
$x_3\ge 0$	(5)	$3y_1+2y_2\ge 5$	(5*)
$x_4\ge 0$	(6)	$y_1 +3y_2\ge 4$	(6*)

Để x* là PATU, cần và đủ là tìm được một PA y* = (y_1*, y_2*) của (G*) để x* và y* thỏa mãn định lý độ lệch bù.

Vì (4): $x_2 = 1 > 0$, và (5): $x_3 = 1 > 0$ thỏa mãn với dấu ">" nên (4*) và (5*) phải thỏa mãn dấu "=", tức là

$$\begin{cases}2y_1+y_2=3\\3y_1+2y_2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_1=1\\y_2=1\end{cases}\Leftrightarrow\ y^* = (1, 1).$$

Kiểm tra trực tiếp ta thấy y* = (1, 1) thỏa mãn tất cả hệ ràng buộc (1*) – (6*) của (G*). Do đó y* = (1, 1) là PA của (G*). Hơn nữa kiểm tra được ngay x*, y* thỏa mãn định lý độ lệch bù. Vậy x* là PATU của (G), còn y* là PATU của (G*).

Ta cũng đồng thời thấy rằng bất kỳ PATU y** nào của (G*), do định lý đọ lệch bù đều suy ra y**= y* = (1, 1). Nói cách khác, y* là PATU duy nhất của (G*).

c) Bây giờ ta đi tìm tập tất cả các PATU của (G) thỏa mãn thêm điều kiện $x_3 + 5x_4 = 1$. Xét x = (x_1, x_2, x_3, x_4) là PATU bất kỳ của (G). Ta sẽ dùng định lý độ lệch bù cho cặp x và y*.

Rõ ràng y* = (1, 1) thỏa mãn dấu ">" ở cả hai ràng buộc dấu (1*), (2*) nên bắt buộc (1), (2) phải xẩy ra dấu "=". Tức là ta có hệ PT

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+x_4=5\\x_1+x_2+2x_3+3x_4=3\end{cases}$$

Kết hợp thêm điều kiện $x_3 + 5x_4 = 1$ và các rằng buộc dấu ta được hệ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ \qquad\qquad x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 + 7a \geq 0 \\ x_3 = 1 - 5a \geq 0 \\ x_4 = a \geq 0 \end{cases}$$

Vậy tập tất cả các PATU của (G) thỏa mãn điều kiện là $x_3 + 5x_4 = 1$

$$\left\{ x = (0,\ 1+7a,\ 1-5a,\ a)\ /\ 0 \leq a \leq \frac{1}{5} \right\}.$$

Ví dụ 4 Giải bài toán qui hoạch tuyến tính (N) sau đây

$$f = x_1 - x_2 - 2x_4 + 2x_5 - 3x_6 \to \min,$$

với các điều kiện

$$\begin{cases} x_1 \qquad + x_4 + x_5 - x_6 = 2, \\ \quad x_2 \quad + x_4 \qquad + x_6 = 12, \\ \qquad x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 9, \\ \qquad x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \dots, 6. \end{cases}$$

Cho $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ ta được phương án cực biên ban đầu $x^0 = (2; 12; 9; 0; 0; 0)$ với giá trị hàm mục tiêu $f_0 = -10$. Các biến cơ sở là x_1, x_2, x_3. Các biến phi cơ sở là x_4, x_5, x_6. Các hệ số cơ sở $c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 0$.

Bảng đơn hình đầu tiên như sau:

Biến cơ sở	Hệ số cơ sở	PACB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	λ_i
			1	-1	0	-2	2	-3	
x_1	1	2	1	0	0	1	1	–1	**2**
x_2	–1	12	0	1	0	1	0	1	12
x_3	0	9	0	0	1	2	4	3	9/2
Bảng 1		-10	0	0	0	**2**	–1	1	

Trong dòng cuối có $\Delta_4 = 2 > 0$, $\Delta_6 = 1 > 0$ và trên mỗi cột chứa mỗi số ước lượng dương đó đều có những hệ số dương nên phương án x^0 ở bảng này **chưa tối ưu**. Ta cần biến đổi bảng để được PACB mới tốt hơn.

- Biến cơ sở mới cần đưa vào là x_4 (ứng với $\Delta_4 = 2$ lớn nhất).
- Biến loại khỏi cơ sở là x_1 (ứng với $\lambda_1 = 2$ nhỏ nhất).
- Phần tử trụ (xoay) là $a_{14} = 1$ (trong ô được tô bóng mờ).

Biến đổi bảng 1 theo các qui tắc đã nêu ta nhận được bảng 2 dưới đây

Biến cơ sở	Hệ số cơ sở	PACB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	λ_i
			1	–1	0	–2	2	–3	
x_4	–2	2	1	0	0	1	1	–1	
x_2	–1	10	–1	1	0	0	–1	2	5
x_3	0	5	–2	0	1	0	2	5	**1**
Bảng 2		–14	–2	0	0	0	–3	**3**	

Trong dòng cuối của bảng này có $\Delta_6 = 3 > 0$ và trên cột chứa nó có hai hệ số dương nên phương án ở bảng này vẫn **<u>chưa tối ưu</u>**. Ta cần biến đổi bảng để được PACB mới tốt hơn.

- Biến cơ sở mới cần đưa vào x_6 (ứng với $\Delta_6 = 3$ lớn nhất).
- Biến loại khỏi cơ sở là x_3 (ứng với tỉ số $\lambda_3 = 1$ nhỏ nhất).
- Phần tử trụ (xoay) là $a_{36} = 5$.

Biến đổi bảng 2 ta nhận được bảng 3 dưới đây.

Biến cơ sở	Hệ số cơ sở	PACB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	λ_i
			1	–1	0	–2	2	–3	
x_4	–2	3	3/5	0	1/5	1	7/5	0	
x_2	–1	8	–1/5	1	–2/5	0	–9/5	0	
x_6	–3	1	–2/5	0	1/5	0	2/5	1	
Bảng 3		–17	–4/5	0	–3/5	0	–21/5	0	

Trong bảng này mọi $\Delta_k \leq 0$, nên ta dừng và kết luận:

Phương án $x^* = (0; 8; 0; 3; 0; 1)$ là **PATU** với $f_{min} = f(x^*) = -17$.

Ví dụ 5 Giải bài toán QHTT sau đây

$$f = x_2 - 3x_3 + 2x_5 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 7, \\ -4x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ -5x_2 + 3x_3 + x_5 + x_6 = 10, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, 6. \end{cases}$$

Ta giải bài toán trên bằng phương pháp đơn hình, xuất phát từ phương án cực biên $x^0 = (7, 0, 0, 12, 0, 10)$ với các biến cơ sở x_1, x_4, x_6 và các hệ số cơ sở là $c_1 = 0$, $c_4 = 0$, $c_6 = 0$. Lập bảng đơn hình rồi thực hiện các tính toán biến đổi theo thuật toán đơn hình ta được các bảng sau:

Biến cơ sở	Hệ số cơ sở	PACB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	λ_i
			0	1	-3	0	2	0	
x_1	0	7	1	1	-1	0	1	0	
x_4	0	12	0	-4	4	1	0	0	**3**
x_6	0	10	0	-5	3	0	1	1	10/3
Bảng 1		0	0	-1	**3**	0	-2	0	
x_1	0	10	1	0	0	1/4	1	0	
x_3	-3	3	0	-1	1	1/4	0	0	
x_6	0	1	0	-2	0	-3/4	1	1	
Bảng 2		-9	0	2	0	-3/4	-2	0	

Trong bảng 2 có $\Delta_2 = 2 > 0$ nhưng mọi phần tử $a_{i2} \le 0$ $(i = 1, 2, 3)$ nên bài toán trên **<u>không có PATU</u>** (vì hàm mục tiêu của bài toán giảm vô hạn trong miền ràng buộc của nó). Nói cách khác, bài toán QHTT đã cho **<u>không có lời giải</u>** **<u>(vô nghiệm)</u>**.

Chú ý: Bài toán tìm $f \to \max$ được thay bằng bài toán tìm $g = -f \to \min$.

Ví dụ 6 Giải bài toán qui hoạch tuyến tính sau

$$f = 3x_1 - x_2 - 2x_3 \;\to\; \max,$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ 3x_1 - 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 10, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_6 = 12, \\ x_j \ge 0,\ j = 1, 2, \ldots, 6. \end{cases}$$

Ta thay f bằng $g = -f = -3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min$ với cùng các điều kiện như trên.

Xuất phát từ phương án cực biên $x^0 = (0, 0, 0, 7, 10, 12)$, ta giải bài toán bằng phương pháp đơn hình (các Bảng 1 - 3). Lời giải thu được là $x^* = (5, 4, 0, 0, 11, 0)$ với $g_{min} = -11$. Từ đó $f_{max} = 11$.

Biến cơ sở	Hệ số cơ sở	PACB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	λ_i
			-3	1	2	0	0	0	
x_4	0	7	-1	3	1	1	0	0	
x_5	0	10	3	-4	8	0	1	0	10/3
x_6	0	12	4	-2	0	0	0	1	**3**
Bảng 1		0	**3**	-1	-2	0	0	0	
x_4	0	10	0	5/2	1	1	0	1/4	**4**
x_5	0	1	0	-5/2	8	0	1	-3/4	
x_1	-3	3	1	-1/2	0	0	0	1/4	
Bảng 2		-9	0	**1/2**	-2	0	0	-3/4	
x_2	1	4	0	1	2/5	2/5	0	1/10	
x_5	0	11	0	0	9	1	1	-1/2	
x_1	-3	5	1	0	1/5	1/5	0	3/10	
Bảng 3		f= -11	0	0	-11/5	-1/5	0	-4/5	

Kết luận: Nghiệm của BT đã cho là **$x^* = (5, 4, 0, 0, 11, 0)$ với $f_{max} = 11$.**

Ví dụ 7. Giải bài toán (C) : $f(x) = 3x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min$,

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 9, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

Đưa vào ba biến giả $x_5, x_6, x_7 \geq 0$ với hệ số giả $M > 0$ (đủ lớn) ta được bài toán (N)

$$f = 3x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + M(x_5 + x_6 + x_7) \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_6 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 3x_4 + x_7 = 9, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).$$

Ta giải bài toán (N) bằng phương pháp đơn hình, xuất phát từ phương án cực biên $x^0 = (0, 0, 0, 0, 2, 6, 9)$.

Quá trình giải bài toán (N) được ghi tóm tắt trong các bảng sau (Bảng 1 - 4).

Biến cơ sở	Hệ số C_B	PACB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	λ
			3	-3	1	-1	M	M	M	
x_5	M	2	-1	1	2	1	1	0	0	**2**
x_6	M	6	1	1	-1	-1	0	1	0	6
x_7	M	9	3	2	-6	3	0	0	1	4.5
Bảng 1		17M	3M-3	**4M+3**	< 0	3M+1	0	0	0	
x_2	-3	2	-1	1	2	1		0	0	
x_6	M	4	2	0	-3	-2		1	0	2
x_7	M	5	5	0	-10	1		0	1	**1**
Bảng 2		9M-6	**7M**	0	< 0	< 0		0	0	
x_2	-3	3	0	1	0	6/5		0		
x_6	M	2	0	0	1	-12/5		1		**2**
x_1	3	1	1	0	-2	1/5		0		
Bảng 3		2M-6	0	0	**M-7**	< 0		0		
x_2	-3	3	0	1	0	6/5				
x_3	1	2	0	0	1	-12/5				
x_1	3	5	1	0	0	-23/5				
Bảng 4		8	0	0	0	-94/5				

Ở Bảng 4 ta thấy $\Delta_k \le 0$ với mọi k = 1, 2, 3, 4, nên phương án cho ở bảng này x = (5, 3, 2, 0, 0, 0, 0) là phương án tối ưu của bài toán (M). Vậy x* = (5, 3, 2, 0) là phương án tối ưu của bài toán ban đầu với $f_{min} = 8$.

Ví dụ 8. Giả bài toán (C) : $f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \min$,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 105, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 140, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 70, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Đưa vào hai biến giả $x_5, x_6 \ge 0$ với hệ số giả M > 0 (đủ lớn) ta được bài toán (N)

$$F(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + M(x_5 + x_6) \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 105, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_6 = 140, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 70, \\ x_j \ge 0 \; ; \; j = 1, 2, \ldots, 6. \end{cases}$$

Ta giải bài toán (N) bằng phương pháp đơn hình, xuất phát từ phương án cực biên $x^0 = (0, 0, 0, 70, 105, 140)$.

Quá trình giải bài toán (N) được ghi tóm tắt trong các bảng sau (Bảng 1 - 3).

Biến cơ sở	Hệ số C_B	PACB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	λ
			1	2	3	– 1	M	M	
x_5	M	105	1	2	3	0	1	0	**35**
x_6	M	140	2	1	3	0	0	1	140/3
x_4	– 1	70	1	2	1	1	0	0	70
Bảng 1		245M – 70	3M – 2	3M –4	**6M – 4**	0	0	0	Chưa
x_3	3	35	1/3	2/3	1	0		0	105
x_6	M	35	1	– 1	0	0		1	**35**
x_4	– 1	35	2/3	4/3	0	1		0	105/2
Bảng 2		35M+70	**> 0**	< 0	0	0		0	Chưa
x_3	3	70/3	0	1	1	0			
x_1	1	35	1	– 1	0	0			
x_4	– 1	35/3	0	2	0	1			
Bảng 3		280/3	0	– 2 < 0	0	0			T.U

Ở Bảng 3 ta thấy $\Delta_k \le 0$ với mọi k = 1, 2, 3, 4, nên phương án cho ở bảng này $x = (35, 0, 70/3, 35/3, 0, 0)$ là phương án tối ưu của bài toán (N).

Vậy $x^* = (35, 0, 70/3, 35/3)$ là PATU của bài toán (C) ban đầu với $f_{min} = 280/3$.

BÀI TẬP

1. Đưa về dạng chính tắc (C) và dạng chính tắc chuẩn (N) các bài toán QHTT dưới đây.

a) $f(x) = 2x_1 - x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \le 2, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 \ge 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0, x_2$ tuỳ ý.

b) $f(x) = 3x_1 + x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 \ge 3, \\ x_1 + x_2 \le 4, \\ 2x_1 - x_2 = 5, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

2. Viết các bài toán qui hoạch tuyến tính sau ở dạng chính tắc (C)

a) $f(x) = 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 4x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 8, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \ge 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \text{ tuỳ ý.} \end{cases}$$

b) $f(x) = 2x_1 - 3x_2 + x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 \le 15, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 10, \\ -3x_1 - 6x_2 + 2x_3 \ge 25, \\ x_1 \ge 0, x_3 \ge 0, x_2 \text{ tuỳ ý.} \end{cases}$$

3. Tìm các phương án cực biên không suy biến của bài toán qui hoạch tuyến tính với điều kiện ràng buộc dưới đây.

a)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_j \ge 0 \ (j = 1, 2, 3). \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 14, \\ x_j \ge 0 \ (j = 1, 2, 3). \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 = 0, \\ x_j \ge 0 \ (j = 1, 2, 3). \end{cases}$$

4. Lập các bài toán đối ngẫu của các bài 1, 2 nêu trên.

5. Xét bài toán QHTT (G) sau đây

$$f = -x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 12x_2 + 3x_4 = 24; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 3; \\ 4x_1 - 18x_2 + 2x_3 + 3x_4 \ge -33; \\ x_j \ge 0; j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

a) CMR x* = (0, 1, 0, 4) là PA, PACB của bài toán (G) đã cho.

b) Lập bài toán đối ngẫu (G*) của (G).

c) x* có là PATU của (G) không? tại sao? Tìm một PATU của (G*).

Đáp án: x* là PACB và PATU của (G; y* = $(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)$ là PATU của (G*).

6. Giải bài toán tương tự bài 4 với (G) và x* như dưới đây.

$$f = -2x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq -1; \\ 4x_1 + x_3 - 5x_4 + 2x_5 \geq 5; \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 2; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

x* = (0, 0, 2,– 2, 0).

Đáp án: - x* là PA, không là PACB, không là PATU của (G).

- y* = (1, 0, – 1) là PATU của (G*).

7. Biết rằng x* = $(1, \frac{5}{4}, \frac{11}{4})$ là một PATU của bài toán (G) dưới đây:

$$f = 15x_1 + 10x_2 + 6x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 2; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 3; \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \geq 2; \\ 4x_1 + 2x_1 - 2x_1 \geq 1; \\ x_1 \geq 1; \\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Tìm PATU của bài toán đối ngẫu. **Đáp án**: y* = (0, 0, 8, 1, 27) là PATU của (G*).

8. Giải bài toán QHTT sau đây

$$f = 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_4 = 1; \\ x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 7; \\ -x_3 + 3x_4 + x_5 = 16; \\ x_j \geq 0; j = 1, 2, 3, 4, 5. \end{cases}$$

Đáp số: x* = (0, 0, 21, 10, 7), $f_{\min}$ = 8.

9. Giải bài toán QHTT sau đây

$$f = 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 - 5x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_5 = 152; \\ 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 60; \\ 3x_2 + x_5 + x_6 = 36; \\ x_j \geq 0; j = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \end{cases}$$

Đáp số : x* = (32, 0, 30, 0, 36), $f_{\min}$ = 184.

10. Giải bài toán QHTT sau đây

$$f = 6x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 - 7x_5 + 6x_7 \to \min$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_4 + x_6 + x_7 = 15; \\ 2x_1 - x_3 + 2x_6 + x_7 = -9; \\ 4x_1 + 2x_4 + x_5 - 3x_6 = 2; \\ x_j \geq 0;\ j = 1,2,3,4,5,6,7. \end{cases}$$

Đáp án: BT vô nghiệm.

11. Giải các bài toán QHTT dưới đây.

a) $f = 5x_1 - x_2 + x_3 - 10x_4 + 7x_5 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 7, \\ x_j \geq 0;\ j = 1, 2, 3, 4, 5. \end{cases}$$

Đáp án: $x^* = (3/2, ½, 0, 0, 7/2)$, $f_{max} = 63/2$.

b) $f = x_1 + 3x_2 - x_3 + 8x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_3 = 7, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 2, \\ 5x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 11, \\ x_j \geq 0;\ j = 1,2,3,4. \end{cases}$$

Đáp án: $x^* = (5/3, 0, 0, 4/3)$, $f_{min} = 37/3$.

c) $f = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ x_j \geq 0;\ j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Đáp án: $x^* = (3, 0, 1, 3)$, $f_{min} = 2$.

ĐỀ TỔNG ÔN SỐ 1

Câu I (XS – 3 điểm) Có 3 lô hàng.

Lô thứ nhất có **6** sản phẩm gồm **4** sản phẩm tốt và **2** phế phẩm;

Lô thứ hai có **7** sản phẩm gồm **5** sản phẩm tốt và **2** phế phẩm;

Lô thứ ba trống, không có sản phẩm nào.

Từ lô thứ nhất lấy ra ngẫu nhiên **1** sản phẩm, từ lô và lô thứ hai lấy ra 2 sản phẩm tùy ý rồi đem đi trưng bày. Các sản phẩm còn lại của hai lô thứ nhất và thứ hai được đổ dồn vào lô thứ ba.

1. Từ lô thứ ba mới lấy ra ngẫu nhiên **(không trả lại) 1** sản phẩm; sau đó lấy tiếp 1 sản phẩm nữa.
   - **a)** Tính xác suất để sản phẩm lấy ra lần đầu là phế phẩm.
   - **b)** Tính xác suất để sản phẩm lấy lần sau tốt biết rằng sản phẩm lấy lần đầu tốt.
2. Từ lô thứ ba mới lần lượt lấy **3** lần, mỗi lần lấy **1** sản phẩm kiểm tra xong lại **hoàn trả** vào lô hàng. Gọi **X** là số sản phẩm tốt trong 3 sản phẩm đã lấy. Tìm luật phân phối xác suất của **X**. Tính kỳ vọng và phương sai của **3X**.
3. Từ lô thứ ba mới lấy ra cùng một lúc **3** sản phẩm tùy ý. Gọi **Y** là số phế phẩm trong 3 sản phẩm đã lấy. Tìm luật phân phối xác suất của **Y**.

Câu II (TK – 3 điểm) Tìm hiểu mức thu nhập X (triệu đồng/tháng) của công nhân ở khu công nghiệp A năm 2014, điều tra một mẫu ngẫu nhiên 100 công nhân ta ghi được bảng số liệu sau

X (x_i)	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Số công nhân (n_i)	5	10	20	30	20	15

1) Ước lượng thu nhập trung bình hàng tháng của mỗi công nhân toàn khu công nghiệp A năm 2014 với độ tin cậy 99% và ước lượng tỉ lệ công nhân ở khu công nghiệp A năm 2014 có thu nhập hàng tháng không dưới 5,5 triệu đồng với độ tin cậy 95%.

2) Biết rằng năm 2013, thu nhập trung bình của công nhân ở khu công nghiệp A là 5,5 triệu đồng/tháng. Với mức ý nghĩa 5%, có thể cho rằng thu nhập trung bình của công nhân ở khu công nghiệp A năm 2014 đã tăng lên so với năm 2013 hay không?

3) Điều tra ngẫu nhiên 81 công nhân ở khu công nghiệp B thấy có 52 công nhân thu nhập không dưới 6 triệu đồng/tháng. Với mức ý nghĩa 1%, có thể cho rằng tỉ lệ công nhân có thu nhập không dưới 6 triệu đồng/tháng ở hai khu công nghiệp A, B là như nhau được không?

Cho biết một số giá trị của hàm Laplace φ như sau:

$$\varphi(1{,}96) = 0{,}475;\ \varphi(1{,}65) = 0{,}450;\ \varphi(2{,}58) = 0{,}495.$$

<u>Câu III</u> (QHTT – 4 điểm)

1. Cho bài toán QHTT (G) sau đây:

$$f = 4x_1 + 3x_2 - 15x_3 + 2x_4 \to \mathbf{max}$$

$$\begin{cases} -5x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \ge -4; \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 \ge -3; \\ -2x_2 - 6x_3 + 4x_4 \le 2; \\ x_j \ge 0,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \end{cases}$$

a) Viết bài toán đối ngẫu (G*) của bài toán QHTT nêu trên.

b) Kiểm tra xem vectơ x* = (1, 1, 0, 1) có là PA, PACB của bài toán (G) không.

c) Kiểm tra xem vectơ x* = (1, 1, 0, 1) có là PATU của (G) không. Từ đó suy ra PATU của bài toán đối ngẫu (G*).

2. Giải bài toán QHTT sau đây bằng phương pháp đơn hình

$$f(x) = 8x_1 - x_3 - x_4 - 2x_5 \to \mathbf{max}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_4 + x_5 = 4, \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 6, \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_j \ge 0,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5. \end{cases}$$

Ghi chú:

- Các đáp số của câu xác suất cần tính đúng (dạng phân số hay thập phân).
- Các đáp số của câu thống kê được phép làm tròn đến 04 chữ số lẻ thập phân.

VẮN TẮT ĐÁP ÁN ĐỀ TỔNG ÔN SỐ 1

<u>Câu I</u> (XS – 3 điểm) Có 3 lô hàng.

Lô thứ nhất có 6 sản phẩm gồm 4 sản phẩm tốt và 2 phế phẩm;

Lô thứ hai có 7 sản phẩm gồm 5 sản phẩm tốt và 2 phế phẩm;

Lô thứ ba trống, không có sản phẩm nào.

Từ lô thứ nhất lấy ra ngẫu nhiên 1 sản phẩm, từ lô thứ hai lấy ra 2 sản phẩm tùy ý rồi đem đi trưng bày. Các sản phẩm còn lại của hai lô thứ nhất và thứ hai được đổ dồn vào lô thứ ba.

1. **Từ lô thứ ba mới lấy ra ngẫu nhiên (không trả lại) 1 sản phẩm; sau đó lấy tiếp 1 sản phẩm nữa.**
    a. **Tính xác suất để sản phẩm lấy ra lần đầu là phế phẩm.**
    b. **Tính xác suất để sản phẩm lấy lần sau tốt biết rằng sản phẩm lấy lần đầu tốt.**

<u>Giải</u> Gọi

- A_i là biến cố trong 3 sản phẩm trưng bày có i sản phẩm tốt; i = 0, 1, 2, 3.
- X_k là biến cố lấy lần thứ k từ lô thứ ba mới được sản phẩm xấu; k = 1, 2.
- T_k là biến cố lấy lần thứ k từ lô thứ ba mới được sản phẩm tốt; k = 1, 2.

a) Tính xác suất để sản phẩm lấy ra lần đầu là phế phẩm.

Ta cần tính $P(X_1)$. Ta thấy $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ là hệ đầy đủ các biến cố. Theo công thức XSĐĐ, ta có:

$$P(X_1) = P(\mathbf{A_0})P(X_1/\mathbf{A_0}) + P(\mathbf{A_1})P(X_1)/\mathbf{A_1}) + P(\mathbf{A_2})P(X_1/\mathbf{A_2}) + P(\mathbf{A_3})P(X_1/\mathbf{A_3}) \quad (1)$$

Mà $P(A_0) = \frac{2}{6}.\frac{C_2^2}{C_7^2} = \frac{1}{63}$; $P(A_1) = \frac{4}{6}.\frac{C_2^2}{C_7^2} + \frac{2}{6}.\frac{C_2^1C_5^1}{C_7^2} = \frac{12}{63}$;

$P(A_2) = \frac{2}{6}.\frac{C_5^2}{C_7^2} + \frac{4}{6}.\frac{C_2^1C_5^1}{C_7^2} = \frac{30}{63}$; $P(A_3) = \frac{4}{6}.\frac{C_5^2}{C_7^2} = \frac{20}{63}$.

Nhớ rằng

+ Khi A_0 xẩy ra thì Hộp 3 sẽ có 10 sản phẩm với 9 tốt và 1 phế phẩm.
+ Khi A_1 xẩy ra thì Hộp 3 sẽ có 10 sản phẩm với 8 tốt và 2 phế phẩm.
+ Khi A_2 xẩy ra thì Hộp 3 sẽ có 10 sản phẩm với 7 tốt và 3 phế phẩm.
+ Khi A_3 xẩy ra thì Hộp 3 sẽ có 10 sản phẩm với 6 tốt và 4 phế phẩm.

Do đó $P(X_1/\mathbf{A_0}) = \frac{1}{10}$; $P(X_1)/\mathbf{A_1}) = \frac{2}{10}$; $P(X_1/\mathbf{A_2}) = \frac{3}{10}$; $P(X_1/\mathbf{A_3}) = \frac{4}{10}$.

Thay vào (1) ta được

$$P(X_1) = \frac{1}{63}.\frac{1}{10} + \frac{12}{63}.\frac{2}{10} + \frac{30}{63}.\frac{3}{10} + \frac{20}{63}.\frac{4}{10} = \frac{13}{42}.$$

b) Tính xác suất để sản phẩm lấy lần sau tốt biết rằng sản phẩm lấy lần đầu tốt.

Ta cần tính $P(T_2/T_1)$. Theo công thức nhân, ta có

$$P(T_1T_2) = P(T_1)P(T_2/T_1) \Rightarrow P(T_2/T_1) = P(T_1T_2)/ P(T_1) \quad (2)$$

Mà $P(T_1) = 1 - P(X_1) = 1 - \frac{13}{42} = \frac{29}{42}$; Lại áp dụng công thức XSĐĐ ta có

$$P(T_1T_2) = P(\mathbf{A_0})P(T_1T_2/\mathbf{A_0}) + P(\mathbf{A_1})P(T_1T_2)/\mathbf{A_1}) + P(\mathbf{A_2})P(T_1T_2/\mathbf{A_2}) + P(\mathbf{A_3})P(T_1T_2/\mathbf{A_3})$$

$$= \frac{1}{63}(\frac{9}{10}.\frac{8}{9}) + \frac{12}{63}(\frac{8}{10}.\frac{7}{9}) + \frac{30}{63}(\frac{7}{10}.\frac{6}{9}) + \frac{20}{63}(\frac{6}{10}.\frac{5}{9}) = \frac{62}{135}.$$

Thay vào (2) ta được $P(T_2/T_1) = \frac{868}{1305}$ ($\approx 66{,}51\%$)

2. Từ lô thứ ba mới lần lượt lấy 3 lần, mỗi lần lấy 1 sản phẩm kiểm tra xong lại hoàn trả vào lô hàng. Gọi X là số sản phẩm tốt trong 3 sản phẩm đã lấy. Tìm luật phân phối xác suất của X. Tính kỳ vọng và phương sai của 3X.

Giải Đặt p là xác suất để mỗi lần lấy 1 sản phẩm (có hoàn lại) từ lô thứ ba mới thì được sản phẩm tốt. Ta có

$$p = P(T_1) = 1 - P(X_1) = 1 - \frac{13}{42} = \frac{29}{42}; \ q = 1 - p = P(X_1) = \frac{13}{42}.$$

Khi đó X có **phân phối nhị thức kiểu B(3; $\frac{29}{42}$)**. Suy ra

- $E(3X) = 3E(X) = 3.\ 3.\ \frac{29}{42} = \frac{87}{14} \approx 6{,}2143.$
- $D(3X) = 3^2D(X) = 9.\ 3.\ \frac{29}{42}.\ \frac{13}{42} = \frac{1131}{196} \approx 5{,}7704.$

3. Từ lô thứ ba mới lấy ra cùng một lúc 3 sản phẩm tùy ý. Gọi Y là số phế phẩm trong 3 sản phẩm đã lấy. Tìm luật phân phối xác suất của Y.

Giải: Rõ ràng **Y** = {0, 1, 2, 3}. **Y** không tuân theo luật phân phối thông dụng nào. Ta cần lập bảng phân phối xác suất của **Y**. Để tính các xác suất P(**Y** = k), k = 0,1,2, 3; ta áp dụng công thức xác suất đầy đủ.

$$P(Y= k) = P(\mathbf{A_0})P((Y= k)/\mathbf{A_0}) + P(\mathbf{A_1})P((Y= k))/\mathbf{A_1}) + P(\mathbf{A_2})P((Y= k)/\mathbf{A_2}) + P(\mathbf{A_3})P((Y= k)/\mathbf{A_3}) \quad (3.k)$$

(k = 0, 1, 2, 3).

Nhắc lại là $P(A_0) = \frac{2}{6}.\frac{C_2^2}{C_7^2} = \frac{1}{63}$; $P(A_1) = \frac{4}{6}.\frac{C_2^2}{C_7^2} + \frac{2}{6}.\frac{C_2^1C_5^1}{C_7^2} = \frac{12}{63}$;

$P(A_2) = \frac{2}{6}.\frac{C_5^2}{C_7^2} + \frac{4}{6}.\frac{C_2^1C_5^1}{C_7^2} = \frac{30}{63}$; $P(A_3) = \frac{4}{6}.\frac{C_5^2}{C_7^2} = \frac{20}{63}$;

Hơn nữa

+ Khi A_0 xảy ra thì Hộp 3 sẽ có 10 sản phẩm với 9 tốt và 1 phế phẩm.
+ Khi A_1 xảy ra thì Hộp 3 sẽ có 10 sản phẩm với 8 tốt và 2 phế phẩm.
+ Khi A_2 xảy ra thì Hộp 3 sẽ có 10 sản phẩm với 7 tốt và 3 phế phẩm.
+ Khi A_3 xảy ra thì Hộp 3 sẽ có 10 sản phẩm với 6 tốt và 4 phế phẩm.

Do đó ta có

$P((Y=0)/A_0) = \frac{C_9^3}{C_{10}^3}$; $P((Y=1)/A_0) = \frac{C_9^2C_1^1}{C_{10}^3}$; $P((Y=2)/A_0) = P((Y=3)/A_0) = 0$;

$P((Y=0)/A_1) = \frac{C_8^3}{C_{10}^3}$; $P((Y=1)/A_1) = \frac{C_8^2C_2^1}{C_{10}^3}$; $P((Y=2)/A_1) = \frac{C_8^1C_2^2}{C_{10}^3}$; $P((Y=3)/A_1) = 0$;

$P((Y=0)/A_2) = \frac{C_7^3}{C_{10}^3}$; $P((Y=1)/A_2) = \frac{C_7^2C_3^1}{C_{10}^3}$; $P((Y=2)/A_2) = \frac{C_7^1C_3^2}{C_{10}^3}$; $P((Y=3)/A_2) = \frac{C_3^3}{C_{10}^3}$;

$P((Y=0)/A_3) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3}$; $P((Y=1)/A_3) = \frac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}$; $P((Y=2)/A_3) = \frac{C_6^1C_4^2}{C_{10}^3}$; $P((Y=3)/A_3) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3}$;

Lần lượt thay vào các công thức (3.k) tương ứng với từng trường hợp, ta tính được

$$P(Y=0) = \frac{1}{63}.\frac{C_9^3}{C_{10}^3} + \frac{12}{63}.\frac{C_8^3}{C_{10}^3} + \frac{30}{63}.\frac{C_7^3}{C_{10}^3} + \frac{20}{63}.\frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1103}{3780} \approx 29{,}180\%\ ;$$

$$P(Y=1) = \frac{1}{63}.\frac{C_9^2C_1^1}{C_{10}^3} + \frac{12}{63}.\frac{C_8^2C_2^1}{C_{10}^3} + \frac{30}{63}.\frac{C_7^2C_3^1}{C_{10}^3} + \frac{20}{63}.\frac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{1899}{3780} = \frac{211}{420} \approx 50{,}238\%$$

;

$$P(Y=2) = \frac{1}{63}.0 + \frac{12}{63}.\frac{C_8^1C_2^2}{C_{10}^3} + \frac{30}{63}.\frac{C_7^1C_3^2}{C_{10}^3} + \frac{20}{63}.\frac{C_6^1C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{723}{3780} = \frac{241}{1260} \approx 19{,}127\%\ ;$$

$$P(Y=3) = \frac{1}{63}.0 + \frac{12}{63}.0 + \frac{30}{63}.\frac{C_3^3}{C_{10}^3} + \frac{20}{63}.\frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{55}{3780} = \frac{11}{756} \approx 1{,}455\%\ ;\ .$$

Vậy bảng PPXS của **Y** như sau

Y	**0**	**1**	**2**	**3**
P	$\frac{1103}{3780}$	$\frac{1899}{3780} = \frac{211}{420}$	$\frac{723}{3780} = \frac{241}{1260}$	$\frac{55}{3780} = \frac{11}{756}$

<u>Câu II</u> (TK – 3 điểm) Tìm hiểu mức thu nhập X (triệu đồng/tháng) của công nhân ở khu công nghiệp A năm 2013, điều tra một mẫu ngẫu nhiên 100 công nhân ta ghi được bảng số liệu sau

X (x_i)	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Số công nhân (n_i)	5	10	20	30	20	15

1) Ước lượng thu nhập trung bình hàng tháng của mỗi công nhân toàn khu công nghiệp A năm 2014 với độ tin cậy 99% và ước lượng tỉ lệ công nhân ở khu công nghiệp A năm 2014 có thu nhập hàng tháng không dưới 5,5 triệu đồng với độ tin cậy 95%.

<u>Giải</u>

* ***Ước lượng thu nhập trung bình hàng tháng***

- Các đặc trưng mẫu $\overline{X} = 5{,}95$; $S = \sigma_{n-1} = 1{,}3661$.
- Độ tin cậy $1 - \alpha = 0{,}99$; $\varphi(2{,}58) = 0{,}495 = (1-\alpha)/2 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}58$.
- Độ chính xác: $\varepsilon = 2{,}58.\ 1{,}3661/\sqrt{100} = 0{,}3525$
- $a_1 = 5{,}95 - 0{,}3525 = 5{,}5975$; $a_2 = 5{,}95 + 0{,}3525 = 6{,}3025$.
- Gọi a là thu nhập trung bình hàng tháng của công nhân khu công nghiệp A. Ta có ước lượng:

5,5975 (triệu đồng/tháng) $\leq$ **a** $\leq$ **6,3025** (triệu đồng/tháng) với độ tin cậy 99%.

* ***Ước lượng tỉ lệ công nhân có thu nhập không dưới 5,5 triệu đồng/tháng***

- Tỉ lệ mẫu $f = (30 + 20 + 15)/100 = 65/100 = 0{,}65$.
- Độ tin cậy $1 - \alpha = 0{,}95$; $\varphi(1{,}96) = 0{,}475 = (1-\alpha)/2 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$.
- Độ chính xác: $\varepsilon = 1{,}96.\sqrt{\dfrac{0{,}65(1-0{,}65)}{100}} \approx 0{,}0935$.
- $p_1 = 0{,}65 - 0{,}0935 = 0{,}5565$; $p_2 = 0{,}65 + 0{,}0935 = 0{,}7435$.
- Gọi p là tỉ lệ công nhân có thu nhập không dưới 5 triệu đồng/tháng ở khu công nghiệp A. Ta có ước lượng: **55,65% ≤ p ≤ 74,35%** với độ tin cậy 95%.

2) **Biết rằng năm 2013, thu nhập trung bình của công nhân ở khu công nghiệp A là 5,5 triệu đồng/tháng. Với mức ý nghĩa 5%, có thể cho rằng thu nhập trung bình của công nhân ở khu công nghiệp A năm 2014 đã tăng lên so với năm 2013 hay không?**

Giải: Gọi a là thu nhập trung bình của công nhân ở khu công nghiệp A năm 2013.

Đặt giả thuyết H: a = 5,5 (triệu đồng/tháng), đối thuyết $\overline{H}$: a > 5,5.

Ta cần kiểm định với mức ý nghĩa $\alpha = 0{,}05$.

- Đã có các đặc trưng mẫu (theo câu 1): $\overline{X} = 5{,}95$; $S = \sigma_{n-1} = 1{,}3661$.
- Mức ý nghĩa $\alpha = 0{,}05$; $\varphi(1{,}65) = 0{,}45 = (1/2) - \alpha \Rightarrow z_\alpha = 1{,}65$.
- Giá trị tiêu chuẩn của kiểm định: $z_0 = (5{,}95 - 5{,}5).\sqrt{100}/1{,}3661 \approx 3{,}2940$.
- Vì $z_0 > z_\alpha$ nên H bị bác bỏ.
- **Kết luận**: Có cơ sở cho rằng **thu nhập trung bình hàng tháng của công nhân khu công nghiệp A năm 2014 đã tăng hơn so với năm 2013** với mức ý nghĩa 5%.

3) **Điều tra ngẫu nhiên 81 công nhân ở khu công nghiệp B thấy có 52 công nhân thu nhập không dưới 6 triệu đồng/tháng. Với mức ý nghĩa 1%, có thể cho rằng tỉ lệ công nhân có thu nhập không dưới 6 triệu đồng/tháng ở hai khu công nghiệp A, B là như nhau được không?**

Giải: Gọi p_1, p_2 tương ứng là tỉ lệ công nhân có thu nhập không dưới 6 triệu đồng/tháng ở khu công nghiệp A, B.

Đặt giả thuyết H: $p_1 = p_2$; Đối thuyết $\overline{H}$: $p_1 \neq p_2$.

Ta cần kiểm định với mức ý nghĩa 1% = 0,01.

- Mẫu của A: $n_1 = 100$, $k_1 = 65$, $f_1 = 0{,}65$.

Mẫu của B: $n_2 = 81$, $k_2 = 52$; $f_2 = 52/81 \approx 0,6420$.

- Mức ý nghĩa $\alpha = 0,01$; $\varphi(2,58) = 0,495 = (1 - \alpha)/2 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,58$.
- Giá trị tiêu chuẩn của kiểm định: $z_0 \approx 0,1119$.
- Vì $|z_0| < z_{\alpha/2}$ nên ta chấp nhận H.
- Kết luận: Có cơ sở để cho rằng **tỉ lệ công nhân có thu nhập không dưới 6 triệu đồng/tháng ở hai khu công nghiệp A, B là như nhau** với mức ý nghĩa 1%.

Câu III (QHTT – 4 điểm)

1. **Cho bài toán QHTT (G) sau đây:**

$$f = 4x_1 + 3x_2 - 15x_3 + 2x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} -5x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \geq -4; \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 \geq -3; \\ -2x_2 - 6x_3 + 4x_4 \leq 2; \\ x_j \geq 0, \ j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

a) Viết bài toán đối ngẫu (G*) của bài toán QHTT nêu trên.

b) Kiểm tra xem vectơ x* = (1, 1, 0, 1) có là PA, PACB của bài toán (G) không.

c) Kiểm tra xem vectơ x* = (1, 1, 0, 1) có là PATU của (G) không. Từ đó suy ra PATU của bài toán đối ngẫu (G*).

Giải bài toán QHTT (G) đã cho

$$f = 4x_1 + 3x_2 - 15x_3 + 2x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} -5x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \geq -4 & (1) & y_1 \leq 0 & (1^*) \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 \geq -3 & (2) & y_2 \leq 0 & (2^*) \\ -2x_2 - 6x_3 + 4x_4 \leq 2 & (3) & y_3 \geq 0 & (3^*) \\ x_j \geq 0, \ j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

a) Viết bài toán đối ngẫu (G*) của bài toán QHTT nêu trên.

Bài toán đối ngẫu (G*) của (G) như sau:

$$g = -4y_1 - 3y_2 + 2y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} -5y_1 - y_2 \geq 4 & (4^*) & x_1 \geq 0 & (4) \\ -2y_1 - 3y_2 - 2y_3 \geq 3 & (5^*) & x_2 \geq 0 & (5) \\ 4y_1 + 5y_2 - 6y_3 \geq -15 & (6^*) & x_3 \geq 0 & (6) \\ -3y_1 + y_2 + 4y_3 \geq 2 & (7^*) & x_4 \geq 0 & (7) \\ y_1 \leq 0, y_2 \leq 0, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

b) Kiểm tra xem vectơ x* = (1, 1, 0, 1) có là PA, PACB của bài toán (G) không?

+ Thay x* = (1, 1, 0, 1) vào tất cả các ràng buộc (chính và dấu) của (G) đều thỏa mãn. Do đó x* **<u>là PA</u>** của (G).
+ Hơn nữa x* thỏa mãn đúng 4 ràng buộc chặt (với dấu "=") là (1), (2), (3) và (6). Ma trân hệ số của 4 ràng buộc này là

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 & -3 \\ -1 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{(Hạng(A) = 4).}$$

Do đó các ràng buộc chặt độc lập tuyến tính. Vậy x* **<u>là PACB</u>** của (G).

c) Kiểm tra xem vectơ x* = (1, 1, 0, 1) có là PATU của (G) không. Từ đó suy ra PATU của bài toán đối ngẫu (G*).

+ Giả sử x* cùng với y* = (y_1, y_2, y_3) là cặp PATU của (G) và (G*) tương ứng. Vì x* thỏa mãn LỎNG tại (4), (5), (7) nên (4*), (5*), (7*) bắt buộc phải thỏa mãn chặt. Ta được hệ sau đây

$$\begin{cases} -5y_1 + y_2 = 4; \\ -2y_1 - 3y_2 - 2y_3 = 3; \\ 3y_1 - y_2 + 4y_3 = 2. \end{cases}$$ Giải hệ ta được y* = (– 1, – 1, 1).

Hiển nhiên y* thỏa mãn các ràng buộc còn lại của (G*). Bởi thế x*, y* chính là cặp PA thỏa mãn định lý độ lệch bù. Vậy x* **<u>là PATU</u>** của (G), còn y* **<u>là PATU</u>** của (G*).

2. Giải bài toán QHTT sau đây bằng phương pháp đơn hình

$$f(x) = 8x_1 - x_3 - x_4 - 2x_5 \to \textbf{max}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_4 + x_5 = 4, \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 6, \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_j \geq 0,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5. \end{cases}$$

<u>Giải</u>

Ta đưa bài toán đã cho về dạng chính tắc chuẩn (N) như sau

$$g = -f(x) = -8x_1 + x_3 + x_4 + 2x_5 + Mx_6 \to \textbf{min} \text{ (0 < M đủ lớn)}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_4 + x_5 + x_6 = 4, \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 6, \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_j \geq 0,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5. \end{cases}$$

+ PACB xuất phát: x^0 = (0, 6, 1, 0, 0, 4).
+ Biến cơ sở: x_2, x_3, x_6.

+ Hệ số cơ sở: $c_2 = 0$, $c_3 = 1$, $c_6 = M$ (hệ số giả dương đủ lớn).

Bảng đơn hình như sau

Biến CS	Hệ số CS	PACB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	λ
			– 8	0	1	1	2	M	
x_6	M	4	– 2	0	0	1	1	1	4
x_2	0	6	– 1	1	0	0	1	0	
x_3	1	1	1	0	1	2	0	0	**0,5**
Bảng 1		g = 4M +1	< 0	0	0	**M+1**	M– 2	0	Chưa T.U
x_6	M	7/2	–5/2	0	–1/2	0	1	1	**7/2**
x_2	0	6	– 1	1	0	0	1	0	6
x_4	1	1/2	1/2	0	1/2	1	0	0	
Bảng 2		g = (7M+1)/2	< 0	0	< 0	0	> **0**	0	Chưa T.U
x_5	2	7/2	–5/2	0	–1/2	0	1		
x_2	0	5/2	3/2	1	1/2	0	0		5/3
x_4	1	1/2	1/2	0	1/2	1	0		**1**
Bảng 3		g = 15/2	**7/2**	0	< 0	0	0		Chưa T.U
x_5	2	6	0	0	2	5	1		
x_2	0	1	0	1	– 1	–3	0		
x_1	– 8	1	1	0	1	2	0		
Bảng 4		g = 4	0	0	–5	–7	0		T.U

Kết luận: Phương án **x* = (1, 1, 0, 0, 6)** là P.A.T.U (nghiệm) của bài toán đã cho với $f_{max} = -g_{min} = -4$.

Nhận xét:

- Bài toán có nghiệm duy nhất vì các số ước lượng Δ_3, Δ_4 đều âm.
- Có thể không cần thêm ẩn giả x6 mà biến đổi hệ PT rằng buộc một cách đơn giản là lấy PT giữa trừ PT đầu vế với vế ta được hệ rằng buộc mới

$$\begin{cases} -2x_1 + x_4 + x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_j \geq 0, \ j = 1, 2, 3, 4, 5. \end{cases}$$

Lúc này, BT đã có dạng chính tắc chuẩn (N) và giải bằng PP đơn hình như thông thường và **chỉ cần 02 bảng**.

Biến CS	Hệ số CS	PACB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	λ
			– 8	0	1	1	2	
x_5	2	4	– 2	0	0	1	1	
x_2	0	2	1	1	0	–1	0	
x_3	1	1	1	0	1	2	0	
Bảng 1		g = 9	5	0	0	**3**	0	Chưa T.U
x_5	2	6	0	0	2	5	1	**7/2**
x_2	0	1	0	1	–1	–3	0	6
x_1	– 8	1	1	0	1	2	0	
Bảng 2		g = 4	0	0	–5	–7	0	T.U

Tuy nhiên cần nhấn mạnh là, việc biến đổi như thế không phải lúc nào cũng dễ dàng làm được. Nhiều bài toán việc biến đổi như thế còn phức tạp hơn cả việc thêm ẩn giả rồi giải ngay.

ĐỀ TỔNG ÔN SỐ 2

Câu I (XS – 3 điểm)

1. Một hộp có **10** quả bóng bàn trong đó có **7** quả chưa dùng lần nào. Buổi sáng nhóm vận động viên (VĐV) lấy ra **3** quả để tập, tập xong lại trả lại vào hộp. Buổi chiều nhóm VĐV lại lấy ra **3** quả để tập.
   a. Tính XS để cả 3 quả bóng lấy ra buổi chiều đều là bóng chưa dùng lần nào.
   b. Biết rằng trong 3 quả lấy ra buổi chiều có ít nhất 1 quả đã dùng, tính xác suất để 3 quả lấy ra buổi sáng có đúng 2 quả đã dùng.
2. Một kiện hàng có **5** sản phẩm hoàn toàn không rõ chất lượng tốt hoặc phế phẩm. Mọi giả thiết về số sản phẩm tốt có trong kiện đều đồng khả năng. Lấy ngẫu nhiên từ kiện ra **2** sản phẩm để kiểm tra thì thấy cả 2 sản phẩm đều tốt. Tìm quy luật phân phối xác suất của số sản phẩm tốt trong **3** sản phẩm còn lại của kiện.
3. Một cửa hàng có **3** lô sản phẩm. Các sản phẩm đều là chính phẩm hoặc phế phẩm. Tỉ lệ chính phẩm của lô thứ nhất, lô thứ hai, lô thứ ba tương ứng là **90%**, **80%**, **70%**. Khách hàng thứ nhất chọn ngẫu nhiên ra một lô rồi từ lô đã chọn lấy ngẫu nhiên ra 1 sản phẩm. Sau khi xem, khách hàng này hoàn trả sản phẩm đã xem trở lại lô của nó. Khách hàng thứ hai lại chọn ngẫu nhiên 1 sản phẩm từ chính lô mà khách hàng thứ nhất đã chọn. Tính xác suất sản phẩm mà khách hàng thứ hai chọn là chính phẩm biết rằng sản phẩm mà khách hàng thứ nhất chọn là phế phẩm.

Câu II (TK – 3 điểm)

1. Để nghiên cứu nhu cầu (kg/tháng) về một loại hàng ở một khu vực năm 2014, người ta tiến hành khảo sát về nhu cầu mặt hàng này ở 400 hộ gia đình, thu được kết quả:

Nhu cầu (kg/tháng)	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5
Số hộ	10	35	86	132	78	31	18	10

Biết rằng nhu cầu hàng tháng của hộ gia đình về loại hàng này là biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn và khu vực nghiên cứu có 4000 hộ.

a) Với độ tin cậy 99%, hãy ước lượng nhu cầu trung bình của mỗi hộ trong một tháng về mặt hàng này năm 2014.
b) Với độ tin cậy 95%, hãy ước lượng số hộ trong khu vực có nhu cầu không dưới 4kg/tháng trong năm 2014.
c) Số liệu năm 2013 cho biết nhu cầu trung bình của mỗi hộ ở khu vực này là 4,8 kg/tháng. Với mức ý nghĩa 5%, có đủ cơ sở để kết luận nhu cầu trung bình của mỗi hộ trong một tháng về mặt hàng này tại khu vực này năm 2014 có xu hướng giảm đi so với năm 2013 hay không?

2. Người ta tiến hành một cuộc nghiên cứu để so sánh mức lương trung bình của phụ nữ với mức lương trung bình của nam giới trong một công ty lớn. Điều tra một mẫu gồm 100 phụ nữ có mức lương trung bình 10USD/ngày với độ lệch tiêu chuẩn hiệu chỉnh 1,64USD/ngày. Một mẫu khác gồm 75 nam giới có mức lương trung bình 10,2USD/ngày với độ lệch tiêu chuẩn là 1,83USD/ngày. Với mức ý nghĩa 1%, có cơ sở để cho rằng mức lương trung bình của phụ nữ và nam giới là như nhau hay không?
Cho biết một số giá trị của hàm Laplace φ như sau:

$$\varphi(1{,}96) = 0{,}475;\ \varphi(1{,}65) = 0{,}450;\ \varphi(2{,}58) = 0{,}495.$$

<u>Câu III</u> (QHTT – 4 điểm)

1. Cho bài toán QHTT (G) sau đây:

$$f = 4x_1 + 3x_2 - 15x_3 + 9x_4 - 5x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_4 + x_5 \ge b_1; \\ 3x_2 - 7x_4 - x_5 \ge b_2; \\ 4x_3 + 2x_4 - 2x_5 \ge b_3; \\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0. \end{cases}$$

Ở đây b_1, b_2, b_3 là các tham số thực.

a) Tìm tập hợp tất cả các PACB của (G).

b) Viết bài toán đối ngẫu (G*) của bài toán (G).

c) Chứng minh rằng (G) luôn có PATU, còn (G*) luôn có PATU duy nhất với mọi b_1, b_2, b_3. Tìm PATU của (G) và (G*).

2. Giải bài toán QHTT sau đây bằng phương pháp đơn hình

$$f(X) = 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 2x_5 + 2x_6 \to \mathbf{min}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + \quad + x_6 = 0, \\ x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \end{cases}$$

Ghi chú:

- Các đáp số của câu xác suất cần tính đúng (dạng phân số hay thập phân).
- Các đáp số của câu thống kê được phép làm tròn đến 04 chữ số lẻ thập phân.

HƯỚNG DẪN, ĐÁP SỐ CÂU XS VÀ CÂU QHTT CỦA ĐỀ SỐ 2

Câu I (XS – 3 điểm)

1. **Một hộp có 10 quả bóng bàn trong đó có 7 quả chưa dùng lần nào. Buổi sáng nhóm vận động viên (VĐV) lấy ra 3 quả để tập, tập xong lại trả lại vào hộp. Buổi chiều nhóm VĐV lại lấy ra 3 quả để tập.**
   a. **Tính XS để cả 3 quả bóng lấy ra buổi chiều đều là bóng chưa dùng lần nào.**
   b. **Biết rằng trong 3 quả lấy ra buổi chiều có ít nhất 1 quả đã dùng, tính xác suất để 3 quả lấy ra buổi sáng có đúng 2 quả đã dùng.**

   Hướng dẫn: Dùng công thức XSĐĐ và Bayes.

Giải

Gọi

+ D_i là biến cố trong 3 quả bóng lấy ra buổi sáng có i quả đã dùng, i = 0, 1, 2, 3.

+ C là biến cố cả 3 quả bóng lấy ra buổi chiều đều chưa dùng lần nào.

Khi đó $\overline{C}$ là biến cố trong 3 quả bóng lấy ra buổi chiều có ít nhất 1 quả đã dùng.

Đương nhiên $\{D_0, D_1, D_2, D_3\}$ là hệ đầy đủ.

a) Ta cần tính P(C). Theo công thức đầy đủ ta có

$$P(C) = \sum_{i=0}^{3} P(D_i)P(C/D_i)$$

$$= \frac{C_7^3}{C_{10}^3}.\frac{C_4^3}{C_{10}^3} + \frac{C_3^1C_7^2}{C_{10}^3}.\frac{C_5^3}{C_{10}^3} + \frac{C_3^2C_7^1}{C_{10}^3}.\frac{C_6^3}{C_{10}^3} + \frac{C_3^3}{C_{10}^3}.\frac{C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{1225}{120^2} = \frac{49}{576} \approx 0,0851.$$

b) Ta cần tính $P(D_2/\overline{C}) \underset{Bayes}{\overset{CT}{=}} \frac{P(D_2)P(\overline{C}/D_2)}{P(\overline{C})} = \frac{P(D_2)(1-P(C/D_2))}{1-P(C)}$

$$= \frac{\frac{C_3^2C_7^1}{C_{10}^3}.\left(1-\frac{C_6^3}{C_{10}^3}\right)}{1-(a)} = \frac{\frac{7}{60}}{\frac{527}{576}} = \frac{7}{60}.\frac{576}{527} = \frac{336}{2635} \approx 0,1275.$$

2. **Một kiện hàng có 5 sản phẩm hoàn toàn không rõ chất lượng tốt hoặc phế phẩm. Mọi giả thiết về số sản phẩm tốt có trong kiện đều đồng khả năng. Lấy ngẫu nhiên từ kiện ra 2 sản phẩm để kiểm tra thì thấy cả 2 sản phẩm đều tốt. Tìm quy luật phân phối xác suất của số sản phẩm tốt trong 3 sản phẩm còn lại của kiện.**

   Hướng dẫn: Dùng công thức XSĐĐ và Bayes.

   Gọi: + T là số sản phẩm tốt trong kiện hàng;
   + X là số sản phẩm tốt trong 2 sản phẩm lấy ra;
   + Y là số sản phẩm tốt trong 3 sản phẩm còn lại.

   T = {0,1,2,3,4,5}, X = {0,1,2}, Y = {0,1,2,3}; T = X + Y.

   Ta cần lập bảng PPXS của Y trong điều kiện X = 2.

Nhớ rằng {(T=0), (T=1), (T=2), (T=3), (T=4), (T=5)} là hệ đầy đủ. Hơn nữa, theo giả thiết, T có phân phối đều, tức là P(T = k) = 1/6; k = 0, 1, 2, 3, 4, 5. Áp dụng công thức xác suất đầy đủ ta có

$$\mathrm{P(X = 2)} = \sum_{k=0}^{5} P(T=k)P\left(X=2/T=k\right)$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{0+0+C_2^2+C_3^2+C_4^2+C_5^2}{C_5^2} = \frac{1}{3}.$$

$$P\left(Y=0/X=2\right) = P\left(T=2/X=2\right)$$

$$= \frac{P(T=2)P\left(X=2/T=2\right)}{P(X=2)} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{C_2^2}{C_5^2}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{20} = 0,05.$$

$$P\left(Y=1/X=2)\right) = P\left(T=3/X=2\right)$$

$$= \frac{P(T=3)P\left(X=2/T=3\right)}{P(X=2)} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{C_3^2}{C_5^2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{20} = 0,15.$$

$$P\left(Y=2/X=2\right) = P\left(T=4/X=2\right)$$

$$= \frac{P(T=4)P\left(X=2/T=4\right)}{P(X=2)} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{C_4^2}{C_5^2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{10} = 0,3.$$

$$P\left(Y=3/X=2\right) = P\left(T=5/X=2\right)$$

$$= \frac{P(T=5)P\left(X=2/T=5\right)}{P(X=2)} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{C_5^2}{C_5^2}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Vậy bảng PPXS của Y trong điều kiện X = 2 như sau:

Y/(X=2)	0	1	2	3
P	0,05	0,15	0,3	0,5

3. Một cửa hàng có 3 lô sản phẩm. Các sản phẩm đều là chính phẩm hoặc phế phẩm. Tỉ lệ chính phẩm của lô thứ nhất, lô thứ hai, lô thứ ba tương ứng là 90%, 80%, 70%. Khách hàng thứ nhất chọn ngẫu nhiên ra một lô rồi từ lô đã chọn lấy ngẫu nhiên ra 1 sản phẩm. Sau khi xem, khách hàng này hoàn trả sản phẩm đã xem trở lại lô của nó. Khách hàng thứ hai lại chọn ngẫu nhiên 1 sản phẩm từ chính lô mà khách hàng thứ nhất đã chọn. Tính xác suất sản phẩm mà khách hàng thứ hai chọn là chính phẩm biết rằng sản phẩm mà khách hàng thứ nhất chọn là phế phẩm.

Hướng dẫn và đáp số: Dùng công thức XSĐĐ và tính xác suất có điều kiện nhờ công thức nhân.

Gọi L_k là biến cố khách hàng thứ nhất chọn được lô thứ k; k = 1, 2, 3. Khi đó hiển nhiên $\{L_1, L_2, L_3\}$ là hệ đầy đủ.
Gọi C_j là biến cố khách hàng thứ j chọn được chính phẩm; j = 1, 2.
Đương $\overline{C_j}$ nhiên là biến cố khách hàng thứ j chọn được phế phẩm; j = 1, 2.

Ta cần tính $P(C_2/\overline{C_1}) = \dfrac{P(\overline{C_1}C_2.)}{P(\overline{C_1})}$?

Theo CTXSĐĐ ta có

$$P(\overline{C_1}) = P(L_1)P(\overline{C_1}/L_1) + P(L_2)P(\overline{C_1}/L_2) + P(L_3)P(\overline{C_1}/L_3)$$

$$= \frac{1}{3}(1-0,9) + \frac{1}{3}(1-0,8) + \frac{1}{3}(1-0,7)$$

$$= 0,2 = 20\%.$$

$$P(\overline{C_1}C_2) = P(L_1)P(\overline{C_1}C_2/L_1) + P(L_2)P(\overline{C_1}C_2/L_2) + P(L_3)P(\overline{C_1}C_2/L_3)$$

$$= \frac{1}{3}(1-0,9)0,9 + \frac{1}{3}(1-0,8)0,8 + \frac{1}{3}(1-0,7)0,7$$

$$= \frac{0,46}{3}.$$

Do đó $P(C_2/\overline{C_1}) = \dfrac{P(\overline{C_1}C_2.)}{P(\overline{C_1})} = \dfrac{2,3}{3} \approx 0,7667.$

<u>Câu II</u> (TK – 3 điểm) Học viên tự làm

<u>Câu III</u> (QHTT – 4 điểm)

1. Cho bài toán QHTT (G) sau đây:

$$f = 4x_1 + 3x_2 + 15x_3 + 9x_4 - 5x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_4 + x_5 \geq b_1; \\ 3x_2 - 7x_4 - x_5 \geq b_2; \\ 4x_3 + 2x_4 - 2x_5 \geq b_3; \\ x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Ở đây b_1, b_2, b_3 là các tham số thực.

a) Tìm tập hợp tất cả các PACB của (G).

b) Viết bài toán đối ngẫu (G*) của bài toán (G).

c) Chứng minh rằng (G) luôn có PATU, còn (G*) luôn có PATU duy nhất với mọi b_1, b_2, b_3. Tìm PATU của (G) và (G*).

<u>Giải</u>

a) Tìm tấp hợp tất cả các PACB của (G).

Xét một PACB bất kỳ $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ của (G). Vì (G) có 5 biến và cũng có đúng 5 ràng buộc (3 ràng buộc chính, 2 ràng buộc dấu) nên x bắt buộc phải thỏa mãn cả 5 ràng buộc với dấu "=" (thỏa mãn **chặt**). Nói cách khác, x là nghiệm của hệ 5 phương trình 5 ẩn sau đây:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_4 + x_5 = b_1; \\ 3x_2 - 7x_4 - x_5 = b_2; \\ 4x_3 + 2x_4 - 2x_5 = b_3; \\ x_4 = 0; \\ x_5 = 0. \end{cases}$$

Dễ thấy hệ này có nghiệm duy nhất x* = (b_1/2, b_2/3, b_3/4, 0, 0). Mặt khác ma trận hệ số của hệ chính là ma trận bậc thang

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

với 5 dòng đều khác không. Nghĩa là A có hạng 5 và các rang buộc này độc lập tuyến tính. Vậy x* là PACB, hơn nữa là PACB duy nhất của (G).

Kết luận: Tập hợp các PACB của (G) là { x* = (b_1/2, b_2/3, b_3/4, 0, 0)}.

b) Viết bài toán đối ngẫu (G*) của (G)

Bài toán đối ngẫu của (G) như sau:

$$\text{(G*)} \quad g = b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2y_1 = 4; \\ 3y_2 = 3; \\ 4y_3 = 15; \\ 4y_1 - 7y_2 + 2y_3 \le 9; \\ y_1 - y_2 - 2y_3 \le -5; \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0. \end{cases}$$

c) Chứng minh rằng (G) luôn có PATU, còn (G*) luôn có PATU duy nhất với mọi b_1, b_2, b_3. Tìm PATU của (G) và (G*).

Dễ thấy hệ ràng buộc của (G*) có nghiệm duy nhất y* = (2, 1, 15/4), tức là bài toán (G*) chỉ có duy nhất một PA là y*. Hơn nữa thấy x* = (b_1/2, b_2/3, b_3/4, 0, 0) và y* = (2, 1, 15/4) thỏa mãn định lý cân bằng, cụ thể

$$f(x^*) = 4.b_1/2 + 3.\ b_2/3 + 15.\ b_3/4 = 2b_1 + b_2 + \frac{15}{4}b_3$$

$$g(y^*) = b_1.2 + b_2.1 + b_3.(15/4) = 2b_1 + b_2 + \frac{15}{4}b_3 = f(x^*)$$

<u>**Kết luận**</u> **(G) luôn có PATU, chẳng hạn x* = (b_1/2, b_2/3, b_3/4, 0, 0);**

(G*) có PATU duy nhất (y* =(2, 1, $\frac{15}{4}$) (đpcm).

2. Giải bài toán QHTT sau đây bằng phương pháp đơn hình

$$f(X) = 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 2x_5 + 2x_6 \to \textbf{min}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \quad + x_5 & = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + \qquad + x_6 & = 0, \\ x_j \geq 0, \ j = 1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6. \end{cases}$$

Giải

- PACB xuất phát $x^0 = (0, 0, 0, 6, 1, 0)$
- Biến cơ sở: x_4, x_5, x_6.
- Hệ số cơ sở: $c_4 = 0$, $c_5 = 2$, $c_6 = 2$.
- Bảng đơn hình

Biến cơ sở	Hệ số cơ sở	PA CB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	λ_i
			4	5	–2	0	2	2	
x_4	0	6	1	1	1	1	0	0	6
x_5	2	1	2	3	– 1	0	1	0	1/3
x_6	2	0	1	2	– 1	0	0	1	**0**
Bảng 1		f = 2	2	5	–2	0	0	0	Chưa TU
x_4	0	6	1/2	0	3/2	1	0	– 1/2	4
x_5	2	1	1/2	0	1/2	0	1	– 3/2	**2**
x_2	5	0	1/2	1	– 1/2	0	0	1/2	
Bảng 2		f = 2	– 1/2	0	1/2	0	0	– 5/2	Chưa TU
x_4	0	3	– 1	0	0	1	– 3	4	
x_3	–2	2	1	0	1	0	2	– 3	
x_2	5	1	1	1	0	0	1	– 1	
Bảng 3		f = 1	– 1	0	0	0	– 1	– 1	TU

Kết luận: **$x^* = (0, 1, 2, 3, 0, 0)$ là PATU** của bài toán đã cho với $f_{min} = 1$.
Nhận xét: Bài toán có nghiệm duy nhất.